

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

# ОСНОВИ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ХІМІКІВ

Підручник

*За редакцією О. В. Іщенко*



УДК 311:519.2:54(075.8)

О-75

Автори:

О. В. Іщенко, С. В. Гайдай,  
А. Г. Дяченко, А. В. Яцимирський

Рецензенти:

д-р хім. наук, провід. наук співроб. О. Б. Логінова  
(Інститут надтвердих матеріалів НАН України),  
д-р хім. наук, проф. О. С. Роїк  
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

*Рекомендовано до друку  
вченою радою хімічного факультету  
(протокол № 2 від 20 вересня 2022 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою  
Київського національного університету імені Тараса Шевченка  
(протокол № 9-22 від 1 грудня 2022 року)*

О-75 Основи статистики для хіміків : підручник / О. В. Іщенко, С. В. Гайдай, А. Г. Дяченко, А. В. Яцимирський ; за ред. О. В. Іщенко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2023. – 215 с.

ISBN 978-966-439-232-5

Підручник допоможе студентам засвоїти основи теорії ймовірностей і математичної статистики для правильного оброблення отриманих експериментальних результатів. Написано на основі дисципліни "Статистичні методи в хімії", яка є нормативною для студентів хімічного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Автори ставили завдання – викласти предмет просто й доступно, не обмежуючись повною математичною строгістю. Наведено багато прикладів розрахункового характеру, у яких на конкретному матеріалі проілюстровано застосування статистичних методів.

Для студентів, аспірантів, інженерів хімічних, а також інших природничих факультетів.

УДК 311:519.2:54(075.8)

© Іщенко О. В., Гайдай С. В., Дяченко А. Г., Яцимирський А. В., 2023  
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
ВПЦ "Київський університет", 2023

ISBN 978-966-439-232-5

# ПЕРЕДМОВА

Вивчення умов перебігу процесів і їхніх закономірностей у навколишньому середовищі часто зумовлює потребу проводити певні експерименти, дослідження і спостерігати за їх наслідками. Кожне дослідження або спостереження має реальний вимір, але спроба провести декілька аналогічних досліджень чи спостережень призводить до отримання неоднакових результатів. Дослідник спостерігає та фіксує так зване розсіювання результатів. Таке розсіювання може бути як результатом звичайної помилки, так і результатом випадкових факторів, дія яких має *ймовірнісний* характер. Отже, основою *теорії помилок* є *теорія ймовірностей*, об'єктом вивчення якої є випадкові явища.

Мета застосовування ймовірнісних методів дослідження полягає в тому, щоб обійти дуже складне (часто практично неможливе) вивчення окремого явища та звернутися безпосередньо до законів, що керують масовими випадковими явищами. Вивчення цих законів дозволяє не лише здійснювати науковий прогноз в галузі випадкових явищ, але в ряді випадків допомагає цілеспрямовано впливати на хід цих явищ, контролювати їх, обмежувати сферу дії випадковості, звужувати її вплив на практику.

Імовірнісний, або *статистичний*, метод у науці не конкурує з класичним методом точних наук, а доповнює його, що дозволяє глибше аналізувати явища з урахуванням властивих їм елементів випадковості.

Для сучасного етапу розвитку природничих і технічних наук характерним є широке застосування статистичних методів. Це цілком природно, оскільки у процесі поглибленого вивчення будь-якого кола явищ неминучим є етап, коли, крім виявлення основних закономірностей, потрібно провести аналіз можливих відхилень від них. Зараз немає жодної природничої науки, у якій так чи інакше не застосовувалися б імовірнісні методи. Цілі розділи сучасної фізики базуються на методах теорії ймовірностей. Імовірнісні методи застосовуються в сучасних електро- та радіотехніці, метеорології й астрономії, теорії автоматичного регулювання і машинній математиці.

Широкого застосування набула теорія ймовірностей у різноманітних галузях військової техніки: теорії стрільянини та бомбометання, теорії прицілів і приладів управління вогнем, аеронавігації, тактики й інших розділах військової науки.

Математичні закони теорії ймовірностей є віддзеркаленням реальних статистичних законів, що об'єктивно існують у масових випадкових явищах природи. До вивчення цих явищ теорія ймовірностей застосовує свій метод, який є одним із розділів математики, таким самим логічно точним і строгим, як інші математичні науки.

Отже, матеріал підручника має на меті допомогти студентам опанувати основи теорії ймовірностей і математичної статистики, щоб застосовувати їх для правильної обробки отриманих експериментальних результатів.

## КОРОТКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Теорія ймовірностей, як і багато інших наук, розвинулася з потреб практики. Систематичні дослідження задач, що відбуваються в масових випадкових явищах, і поява відповідного математичного апарату беруть свій початок із XVII ст. Саме на початку XVII ст. відомий італійський фізик Галілео Галілей намагався науково дослідити відхилення фізичних вимірювань і розглядав їх як випадкові, оцінюючи їхню ймовірність. Водночас відбуваються перші спроби створення загальної теорії страхування, заснованої на аналізі закономірностей у таких масових випадкових явищах, як захворюваність, смертність, статистика нещасних випадків тощо. Необхідність створення математичного апарату, спеціально пристосованого для аналізу випадкових явищ, впливала і з потреб обробки й узагальнення широкого статистичного матеріалу в усіх галузях науки.

Проте теорія ймовірностей як математична наука сформувалася не на матеріалах вказаних вище практичних задач: ці задачі дуже складні; у них закони, що керують випадковими явищами, проступають недостатньо виразно і приховані багатьма факторами. Необхідно було спочатку вивчити закономірності випадкових явищ на простішому матеріалі. Таким матеріалом історично виявилися так звані "азартні ігри". Ці ігри з давніх-давен створювалися поколіннями саме так, щоб у них результат досліду був незалежний від умов проведення, був чисто випадковим. Саме слово "азарт" (фр. "le hazard") означає "випадок". Схеми азартних ігор дають виняткові за простотою і прозорістю моделі випадкових явищ, що дозволяють у найбільш виразній формі спостерігати та вивчати специфічні закони, що керують цими явищами, а можливість необмежено повторювати один і той самий дослід забезпечує експериментальну перевірку цих законів в умовах дійсної масовості явищ. Дотепер приклади з галузі азартних ігор і аналогічні їм задачі широко використовуються під час вивчення теорії ймовірностей як спрощені моделі випадкових явищ, що ілюструють у найбільш простому вигляді основні закони і правила теорії.

Виникнення сучасної теорії ймовірностей у вигляді сформованих наукових положень належить середині XVII ст. і пов'язане з дослідженнями французьких математиків Б. Паскаля (1623–1662), П. Ферма (1601–1665) і нідерландського вченого Х. Гюйгенса (1629–1695) в галузі теорії азартних ігор. У цих роботах поступово сформувалися такі важливі поняття, як імовірність і математичне сподівання; були встановлені їхні основні властивості й методи обчислення. Безпосереднє практичне застосування ймовірнісних методів знайшли насамперед у задачах страхування. Уже з кінця XVII ст. страхування почало проводитись на науковій математичній основі. Відтоді теорія ймовірностей набуває широкого вжитку в різних галузях.

Великий крок уперед у розвитку теорії ймовірностей пов'язаний із роботами швейцарського математика Я. Бернуллі (1654–1705), якому належить доведення одного з найважливіших положень теорії – *закону великих чисел*. Ще до Я. Бернуллі багато хто відмічав як емпіричний факт ту особливість випадкових явищ, яку можна назвати "властивістю стійкості частот за великої кількості дослідів". Було неодноразово відмічено, що за багатьох дослідів, результат кожного з яких є випадковим, відносна частота появи кожного цього результату має тенденцію стабілізуватися, наближаючись до деякого певного числа – імовірності цього результату. Наприклад, якщо багато разів кидати монету, відносна частота появи герба наближається до  $1/2$ ; за багатократного кидання гральної кістки частота появи грані з п'ятьма очками наближається до  $1/6$  і так далі. Теорема Бернуллі є простою формою закону великих чисел; вона встановлює зв'язок між імовірністю події та частотою її появи: за достатньо великої кількості дослідів можна із практичною достовірністю очікувати скільки завгодно близького збігу частоти та ймовірності.

Інший важливий етап у розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з ім'ям англійського математика А. Муавра (1667–1754), який обґрунтував своєрідний *нормальний закон* (інакше – закон Гаусса), що дуже часто спостерігається у випадкових явищах. Нормальний закон займає особливе місце у випадкових явищах. Теорема, що обґрунтовує центральне місце цього закону для тих або інших умов, має в теорії ймовірності загальну назву "*центральної граничної теореми*".

Провідна роль у розвитку теорії ймовірностей належить відомому французькому математику П. С. Лапласу (1749–1827). Він уперше дав систематичне викладення основ теорії ймовірностей, довів одну із форм центральної граничної теореми (теореми Муавра – Лапласа) і розвинув ряд додатків теорії ймовірностей, що стосуються аналізу помилок спостережень і вимірювань.

Значний крок уперед у розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з ім'ям німецького математика К. Ф. Гаусса (1777–1855), який дав ще більш загальне обґрунтування нормальному закону й розробив метод обробки експериментальних даних, відомий під назвою "*метод найменших квадратів*".

Варто також відзначити роботи французького вченого С. Д. Пуассона (1781–1840), що довів більш загальну, ніж у Я. Бернуллі, форму закону великих чисел, а також вперше застосував теорію ймовірностей до задач стрілянини. З ім'ям С. Д. Пуассона пов'язаний один із законів розподілу випадкових величин із малою ймовірністю появи події.

Для XVIII і початку XIX ст. був характерний бурхливий розвиток теорії ймовірностей і широке захоплення нею. Теорія ймовірностей стала "модною" наукою. Її починають застосовувати не лише там, де це доречно, але й там, де нічим не виправдано. Для цього періоду характерні численні спроби застосувати теорію ймовірностей до вивчення суспільних явищ, до так званих "моральних" або "етичних" наук. З'явилися численні роботи, присвячені питанням судочинства, історії, політики, навіть богослов'я, у яких застосовувався апарат теорії ймовірностей. Для цих псевдонаукових досліджень характерним є надзвичайно спрощений, механістичний підхід до суспільних явищ, що розглядаються в них. В основу міркувань покладена деяка довільно задана ймовірність (наприклад, під час розгляду питань судочинства схильність кожної людини до правди або брехні оцінюється деякою постійною, однаковою для всіх людей ймовірністю), і далі суспільна проблема розв'язується як просте арифметичне завдання. Природно, що всі подібні спроби були приречені на невдачу й не могли позитивно вплинути на розвиток науки. Навпаки, їхнім непрямим результатом виявилось те, що приблизно в 20–30-х рр. XIX ст. у Західній Європі широке захоплення теорією ймовірностей змінилося розчаруванням і скептицизмом. На неї почали дивитися як на

науку сумнівну, другосортну, своєрідну математичну розвагу, навряд чи гідну серйозного вивчення.

Серед учених, що зробили значний внесок у розвиток теорії ймовірностей варто згадати В. Я. Буняковського (1804–1889), у праці якого "Основи математичної теорії ймовірностей" досліджено виникнення й розвиток цієї науки, наведено приклади її застосування у страхуванні, демографії. П. Л. Чебишева (1821–1894), який свої праці присвятив розробці закону великих чисел і основ методу моментів; А. А. Маркова (1856–1922), який істотно розширив сферу застосування закону великих чисел і центральної граничної теореми, застосувавши їх не лише для незалежних, а й для залежних дослідів. Найважливішою заслугою А. А. Маркова є закладення основ абсолютно нової гілки теорії ймовірностей – теорії випадкових процесів. Розвиток цієї теорії складає основний зміст новітньої, сучасної теорії ймовірностей. З ім'ям О. М. Ляпунова (1857–1918) пов'язано перше доведення центральної граничної теореми для загальних умов, для чого було розроблено спеціальний метод характеристичних функцій, широкоживаний у сучасній теорії ймовірностей. С. Н. Бернштейн (1880–1968) розробив першу закінчену аксіоматику теорії ймовірностей, а також істотно розширив сферу застосування граничних теорем. О. Я. Хінчин (1894–1959) відомий своїми дослідженнями в галузі подальшого узагальнення та посилення закону великих чисел, здебільшого своїми дослідженнями у сфері так званих стаціонарних випадкових процесів. Особливе значення мають роботи А. М. Колмогорова (1903–1987) у галузі теорії випадкових функцій (стохастичних процесів), які натеper є основою всіх досліджень у цій сфері. Роботи А. М. Колмогорова в галузі оцінювання ефективності стали основою нового наукового напрямку в теорії стрілянини, який переріс згодом у науку про ефективність бойових дій. В. І. Романовський (1879–1954) відомий своїми роботами в галузі математичної статистики, Є. Є. Слуцький (1880–1948) – у теорії випадкових процесів, Б. В. Гнеденко (1912–1995) – у теорії масового обслуговування, Є. Б. Динкін (1924–2014) – у галузі марковських випадкових процесів, В. С. Пугачов (1911–1998) – у галузі випадкових процесів у застосуванні до задач автоматичного управління.

Натеper розвиток зарубіжної теорії ймовірностей також відбувається стрімко, у зв'язку з вимогами практики. Переважно



увага зосереджена на питаннях, пов'язаних із випадковими процесами. Значні роботи в цій галузі належать, наприклад, американським вченим: Н. Вінеру, В. Феллеру, Д. Нейману. Н. Вінер (1894–1964) доповнив теорію екстраполяції та фільтрації випадкових процесів, створених А. М. Колмогоровим. В. Феллер (1906–1970), використав закони теорії ймовірностей у генетиці, фізиці й економіці. Отримав ряд важливих результатів у розробці граничних теорем теорії ймовірностей і теорії дифузних випадкових процесів. В. Феллер є автором підручника з теорії ймовірностей, який отримав світове визнання. Д. Нейман (1903–1957) в теорію ігор, яка так само відіграла важливу роль в економіці.

Важливі роботи з теорії ймовірностей і математичної статистики належать англійському вченому Р. Е. Фішеру (1890–1962), який зробив великий внесок у розвиток демографічної статистики.

Також потрібно зупинитися на історії Київської школи теорії ймовірностей в середині XIX ст. Першу лекцію теорії ймовірностей було прочитано М. Є. Ващенко-Захарченко (1825–1912) під час вступу на посаду доцента у 1863 р. в Київському університеті св. Володимира. Учень і колега М. Є. Ващенко-Захарченко професор В. П. Єрмаков (1845–1922) надрукував 1878 р. перший в Україні підручник із теорії ймовірностей. Тоді це був один із найсучасніших підручників. У ньому були представлені нові результати П. Л. Чебишева про закон великих чисел. В. П. Єрмаков став у 1898 р. першим завідувачем кафедри вищої математики Київського політехнічного інституту, а в 1905 р. вийшов посібник В. П. Єрмакова "Метод найменших квадратів", що сприяло широкому використанню описаного ймовірнісного інструмента в багатьох галузях науки.

Професор Київського університету Д. О. Граве (1863–1939), паралельно із вченими Стокгольмського університету Г. Крамером (1704–1752) і Ф. Лундбергом (1876–1965), розробляли страхову математику. Д. О. Граве надрукував підручники: "Математика страхової справи" (1912), "Теорія пенсійних кас" (1917), "Математика соціального страхування" (1924). Із 1908 р. почали працювати відомі семінари Д. О. Граве, на яких було виховано плеяду видатних математиків, серед яких – відомий на весь світ український математик М. П. Кравчук (1892–1942).

Очоловав кафедру математики Київського політехнічного інституту, М. П. Кравчук у кінці 20-х – на початку 30-х рр. працював над розвитком теорії ймовірностей і статистичних досліджень. Разом зі своїми учнями – О. С. Смогоржевським (1896–1969), К. Я. Латишевим (1897–1956) – вивчав ортогональні багаточлени, які відповідали деяким імовірнісним розподілам. Зараз багаточлени, започатковані розподілом Бернуллі, у світовій літературі мають назву багаточленів Кравчука.

Видатний внесок у розвиток української школи теорії ймовірностей зробив Б. В. Гнеденко (1912–1995) – учень О. Я. Хінчина (1894–1959) та А. М. Колмогорова. У 1944–1945 навчальних роках він прочитав у Києві курс теорії ймовірностей і почав проводити студентський семінар "Перетворення Фур'є в теорії ймовірностей і аналізі". Його першими учнями були К. Л. Рвачова (Ющенко) (1919–2001), О. С. Парасюк (1921–2007) та ін. 1948 р. Б. В. Гнеденко був обраний завідувачем відділу теорії ймовірностей в Інституті математики та кафедри теорії ймовірностей у Київському державному університеті (КДУ). За його керівництва у роботах студентів КДУ В. С. Королюка (1925–2020), В. С. Михалевича (1930–1994) та ін. було розроблено оригінальний метод розв'язування комбінаторних задач, так званий "метод траєкторій". Надалі американський математик В. Феллер (1906–1970) під час підготовки другого видання свого підручника "Теорія ймовірностей і її використання" включив у нього спеціальний розділ про методи траєкторій, де наводяться результати Б. В. Гнеденка та його учнів.

Сучасний розвиток теорії ймовірностей характерний зростанням зацікавленості до неї і стрімким розширенням кола її практичних застосувань. За останні десятиліття теорія ймовірностей перетворилася на одну з наук, що найшвидше розвивається та найтісніше пов'язана з потребами практики й техніки.

За останні роки народжуються нові методи прикладної теорії ймовірностей, поява якої пов'язана зі специфікою досліджуваних технічних проблем. Ідеться, зокрема про такі дисципліни: "Теорія інформації" і "Теорія масового обслуговування". Ці розділи теорії ймовірності, що виникли з безпосередніх потреб практики, набувають загального теоретичного значення, а коло їхнього вжитку постійно зростає.

# РОЗДІЛ 1

## Основні поняття теорії ймовірностей

### 1.1. Подія та ймовірність її появи

*Теорія ймовірностей* – це наука про *випадкові події*. Поняття *подія* належить до основних. Можна вважати, що подія – це все те, що може статися чи не статися за визначених умов під час проведення випробування. Наприклад, подія може бути в появі герба під час кидання монети. У цьому випадку подія проявляється у процесі кидання монети. Подія може визначатися в тому, що деякі виробниці, вибрані з партії готових виробів, можуть бути бракованими. У цьому випадку подія – це результат *вибірки* виробів із партії. У наведених прикладах подія відбувалася внаслідок експериментів, проведених людиною. Проте для інтерпретації поняття "події" діяльність людини не є обов'язковою. Наприклад, подія може полягати в тому, що у довільну добу йде дощ над Одесою й реалізується в тому, що в Одесі настав дощовий день.

Отже, **подія – це будь яке явище живої або неживої природи чи суспільного життя.**

Події в теорії ймовірностей позначаються умовно великими літерами латинської абетки:  $A, B, C, D$  тощо чи однією літерою (звичайно  $A$ ) з підстрочними індексами:  $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ , у загальному вигляді –  $A_i$ . Наприклад, подія  $A$  – "випав дощ", подія  $B$  – "студент склав іспит" тощо. Якщо подія складається з появи якогось числа очок на гральному кубу під час його кидання, то в цьому випадку зручно використовувати позначення  $A_i$ : тобто  $A_1$  – поява одиниці,  $A_2$  – поява двійки,  $A_3$  – поява трійки тощо.

Характерною рисою *випадкової події* є те, що внаслідок досліджень вона відбувається не обов'язково. Це відрізняє випадкові події від детермінованих, які відбуваються обов'язково. Випадковість події пов'язана з тим, що багато факторів, які супроводжують дослідження та важливі для його реалізації, не задаються. Ця неповнота інформації в одних випадках є принциповою (наприклад,

в азартних іграх, чи у військових діях), або недоступною сучасному рівню розвитку науки (наприклад, під час складання прогнозу погоди). У деяких випадках передбачення результатів досліджень є принципово можливим, але недоцільним практично, тому що воно потребує невиправданих витрат на додаткові надточні вимірювання.

*Закономірність* випадкових подій проявляється за *багатократного повторення досліджень*. Наприклад, неможливо передбачити результат одиничного кидання монети: може з'явитися як герб, так і решка. Нікого особливо не здивує, якщо за десятикратного кидання герб з'явиться всього двічі, але якщо під час 1000-кратного кидання герб з'являється всього 200 разів, то будь-хто має право сказати, що щось сталося із монетою, чи з процесом кидання. Справа в тому, що за симетричних умов ні герб, ні решка не мають переваги один перед одним, тобто вони мають з'являтися приблизно з однаковою частотою. Звичайно, після 1000 кидків герб не обов'язково з'явиться 500 разів, він може з'явитися і 490, і 525 разів, але точно не 100!

Подібним чином результат одноразової вибірки з партії виробів не дозволяє зробити висновок про якість партії, це можна зробити лише за багатократною вибіркою (за великого об'єму вибірки).

Отже, у теорії ймовірностей розглядаються не просто випадкові події, а *масові* випадкові події, у яких під *масовістю* розуміють багатократне повторення експерименту (випробовування). Відзначимо, що повторення експерименту можна розуміти по-різному. Наприклад, підкидання однієї монетки 1000 разів і підкидання незалежно 1000 однакових монет – це повністю рівноцінні випробовування.

Тому предметом теорії ймовірностей є вивчення кількісних закономірностей, які спостерігаються в масових однорідних випадкових подіях.

Знання закономірностей, що характерні для масових однорідних випадкових подій, дає можливість передбачати їхній подальший розвиток.

Теорія ймовірностей розглядає різні події з погляду оцінювання можливості їхньої появи. Кожній події ставиться у відповідність визначене число, яке називається *ймовірністю цієї події*.

Імовірність позначається літерою  $P$  або маленькою  $p$  (від французької "probabilite", чи англійської "possibility" – ймовірність). Наприклад,  $P(B)$  – імовірність появи події  $B$ ;  $p(A_i)$  – імовірність появи події  $A_i$ .

Імовірність появи **вірогідної події**, яка в разі виконання певної сукупності умов обов'язково відбудеться, вважають за одиницю. Наприклад, якщо всі працівники вищого навчального закладу мають вищу освіту, то подія "навмання вибраний працівник закладу вищої освіти має вищу освіту" є вірогідною.

Імовірність **неможливої події** вважають рівною нулю, отже

$$0 \leq P(A_i) \leq 1. \quad (1.1)$$

Приклад неможливої події наведено на рис. 1.1.



Рис. 1.1. Приклад неможливої події

Події  $A$  та  $B$ , для яких імовірності появи однакові, тобто  $P(A) = P(B)$ , називають **рівноймовірними**.

У випадку рівноймовірних подій, загальне число яких  $n$ :

$$P = \frac{1}{n}. \quad (1.2)$$

Підкидання монетки є прикладом рівноймовірної події:  $P(A) = P(B) = 1/2$ . Для шестигранного кубика з гранями, пронумерованими від 1 до 6, імовірність випадіння конкретної цифри дорівнює  $1/6$ . У наведених прикладах рівноймовірність впливає з умов симетрії.

За умови трактування формули (1.2) можна вважати  $n$  рівним числу рівноможливих результатів у процесі випробування. Наприклад, якщо випробування – це підкидання кубика, то можливими є шість рівноцінних результатів за кількістю граней самого кубика.

Формулу (1.2) можна узагальнити:

$$P = \frac{m}{n}, \quad (1.3)$$

де  $m$  – число сприятливих результатів у цій події,  $n$  – загальна кількість можливих результатів події. Наприклад, якщо подія  $A$  полягає в тому, щоб витягнути навмання з колоди з 32 карт будь-якого туза, то

$$\begin{aligned} n &= 32, \\ m &= 4, \\ P(A) &= \frac{4}{32} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Обчислення ймовірності подій за формулою (1.3) (визначення чисел  $m$  і  $n$ ) часто змушує використовувати елементи комбінаторики, основними поняттями якої є **розміщення**, **переставлення** і **комбінації**.

Наведемо коротку інформацію про ці поняття. Вважатимемо, що в нас є множина  $M$ , що налічує  $n$  елементів і нам потрібно вибрати  $k$  елементів, причому  $k \leq n$ .

**Розміщенням (без повторень)** вважатимемо кількість різних впорядкованих сполучень із  $k$  елементів  $n$ -елементної множини, тобто два розміщення будемо вважати різними не лише тоді, коли вони відрізняються деякими елементами, а й тоді, коли вони складені з однакових елементів і відрізняються їхнім порядком. Наприклад, розміщеннями з трьох елементів  $a_1, a_2, a_3$  по два елемента є такі підмножини:  $a_1a_2, a_1a_3, a_3a_2, a_2a_1, a_3a_1, a_2a_3$ . Число  $A_n^k$  усіх різних розміщень із  $n$  елементів по  $k$  елементів обчислюється за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1.4)$$

Зауважимо, що при  $k = n$  може бути у знаменнику 0!. Щоб формула (1.4) мала зміст, вважатимемо за означенням, що  $0! = 1$ .

**Розміщення з повтореннями** з  $n$  елементів по  $k$  елементів можна отримати так: вибрати з множини  $M$  спочатку елемент  $a_1$  і записати його на першому місці, а потім повернути його назад у множини  $M$ ; наступний елемент після вибору також повернути до множини  $M$  (може трапитись так, що  $a_2 = a_1$ ). За таким формулюванням завдання число  $\bar{A}_n^k$  усіх різних розміщень із повтореннями із  $n$  елементів по  $k$  елементів обчислюється за формулою:

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (1.5)$$

Розміщення без повторень із  $n$  елементів по  $n$  елементів називаються **переставленнями** з  $n$  елементів. Різні переставлення з  $n$  елементів відрізняються лише порядком елементів (бо кожне розміщення містить усі елементи цієї  $n$ -елементної множини). Число  $P_n$  усіх переставлень із  $n$  елементів обчислюється за формулою:

$$P_n = n!. \quad (1.6)$$

Якщо серед елементів  $n$ -вибірki є однакові, то переставлення, які утворюються за рахунок переставлень однакових елементів, нічим не відрізняються між собою. Тому кількість різних переставлень у цьому випадку буде меншою, ніж дає формула (1.6). Такі переставлення називаються **переставленнями з повтореннями** і їхня кількість розраховується за формулою:

$$\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}, \quad (1.7)$$

де  $n_1, n_2, \dots, n_k$  – кількість повторень  $i$ -го елемента.

**Комбінації**, на відміну від розміщень, – це невпорядковані підмножини заданої множини. Дві комбінації вважаються різними, якщо деякий елемент входить в одну з них і не входить в іншу. Наприклад комбінаціями з трьох елементів  $a_1, a_2, a_3$  по два елемента є підмножини  $a_1a_2, a_1a_3$  і  $a_2a_3$ . Число  $C_n^k$  усіх різних комбінацій з  $n$  елементів по  $k$  елементів обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.8)$$

Застосування формул із комбінаторики можна розглянути на таких прикладах.

**Приклад 1.1.** Нехай у коробці міститься 5 кульок, серед яких 3 чорні і 2 білі. Чому дорівнює ймовірність того, що витягнуті навмання дві кульки будуть білими?

*Розв'язок.*

Для розрахунку ймовірності витягання навмання двох білих кульок потрібно використати формулу для комбінації.

$$n = C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10,$$

$$m = 1,$$

$$P(A) = \frac{1}{10} = 0,1.$$

*Приклад 1.2.* Абонент, набираючи номер телефону, забув дві останні цифри й набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Яка ймовірність події  $A$  – набрані абонентом навмання дві цифри номера телефону є правильними?

*Розв'язок.*

Сприятливою може бути лише одна подія – правильно набрані навмання дві цифри. Оскільки цифр для вибору 10 і порядок розташування цифр повинен враховуватися, для розрахунку  $n$  використовуємо формулу для розміщень із 10 елементів по 2 елементи.

$$m = 1,$$

$$n = A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = 90,$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90} = 0,0111.$$

## 1.2. Статистична частота

На практиці не завжди можна скористатися формулою (1.3) для знаходження ймовірності тієї чи іншої події. Замість цього визначають близьку до ймовірності величину, яка є її мірою, її оцінкою – це *статистична частота* ( $P^*(A_i)$ ) цієї події:

$$P^*(A_i) = \frac{g_i}{n}, \quad (1.9)$$

де  $g_i$  – це кількість дослідів, у яких ця подія ( $A_i$ ) справді з'явилась (статистична вага зазначеної події),  $n$  – загальне число



дослідів. Наприклад, під час кидання монети відомо, що ймовірність появи решки  $p = \frac{1}{2}$ . Розглянемо, як поводить себе статистична частота. У табл. 1.1 наведені результати дослідів, які провели Жорж-Луї Леклерк де Бюффон і Карл Пірсон.

*Таблиця 1.1*

**Результати дослідів Жоржа-Луї Леклерка де Бюффона та Карла Пірсона**

Експериментатор	Кількість кидків ( $n$ )	Число появи решки ( $g_i$ )	$P_i^* = \frac{g_i}{n}$
Ж.-Л. Л. Бюффон	4040	2048	0,5080
К. Пірсон	12000	6019	0,5016
К. Пірсон	24000	12012	0,5005

Із наведених даних бачимо, що за достатньо великої кількості дослідів ( $n$ ) статистична частота ( $P_i^*$ ) практично не відрізняється від значення ймовірності появи події ( $P_i = 0,5$ ), причому, чим більше значення  $n$ , тим розбіжності між  $P_i^*$  і  $P_i$  зменшуються. Ця обставина була строго доведена Я. Бернуллі в його теоремі.

Теорема Бернуллі стверджує, що до одиниці прямує ймовірність того, що при  $n \rightarrow \infty$  статистична частота  $P^*(A_i)$  деякої події ( $A_i$ ) відхилиться (за абсолютною величиною) від ймовірності  $P(A_i)$  цієї події на величину, меншу за будь-яке мале задане число  $\varepsilon$  :

$$P\{|P_i^* - P_i| < \varepsilon\} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

В експериментах із підкиданням монети це означає, наприклад, що не виключається теоретично можливість того, що під час усіх  $n$  випробувань монетка ляже гербом догори. Інша справа, що ймовірність такої події занадто мала, навіть при 100 підкиданнях монети ця ймовірність дорівнює  $\sim 10^{-30}$ , тобто подібна подія – випадіння лише герба при великому  $n$  практично неможлива. Отже, прямування  $P$  до одиниці (за співвідношенням 1.10) означає, що при  $n \rightarrow \infty$  статистична частота ( $P_i^*$ ) стає достовірною характеристикою ймовірності  $P_i$ .

### 1.3. Складні події. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Повна група подій

Усе розглянуте вище стосується простих подій. Наступним етапом є розгляд ймовірностей складних подій за відомих ймовірностей подій простих.

**Сумою (об'єднанням)** двох подій  $A + B$  називається подія  $C$ , яка складається з появи хоча б однієї з подій  $A$  чи  $B$ , або обох цих подій разом. Наприклад, якщо з гармати зроблено два постріли,  $A$  – влучення при першому пострілі,  $B$  – влучення при другому пострілі, то  $C = A + B$  – це влучення при першому пострілі, чи при другому, чи при обох пострілах.

Ілюстрацією цього визначення для суми двох подій можуть бути дві мішені, що перекриваються між собою – приклад **сумісних подій** (рис. 1.2). Якщо подія  $A$  – це потраплення в ліву мішень, а подія  $B$  – у праву, то подія  $C = A + B$  – це потраплення в обведену червоним кольором фігуру.

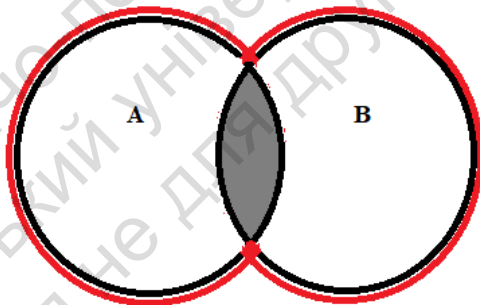


Рис. 1.2. Ілюстрація сумісних подій і їхньої суми

Якщо події  $A$  і  $B$  взаємно виключають одна одну, то вони називаються **несумісними** (прикладом можуть бути дві мішені, що не перекриваються одна з одною).

Для **несумісних** подій сумою  $C = A + B$  називатимемо подію, яка складається з появи однієї з цих подій, немає значення якої.

Нехай події  $A$  та  $B$  – несумісні, причому ймовірності цих подій відомі. Як знайти ймовірність того, що станеться подія  $A$  або подія  $B$ ? Відповідь на це питання дає *теорема додавання*.

*Теорема.* Ймовірність появи однієї із двох несумісних подій, немає значення якої з них, дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.11)$$

*Доведення.* Вводимо позначення:

$n$  – загальне число можливих елементарних результатів досліджень;

$m_1$  – кількість результатів, які сприятливі для події  $A$ ;

$m_2$  – кількість результатів, які сприятливі для події  $B$ .

Кількість результатів, які сприятливі появі події  $A$ , або події  $B$ , дорівнює  $m_1 + m_2$ .

$$\text{Отже, } P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}.$$

Узявши до уваги, що  $\frac{m_1}{n} = P(A)$  та  $\frac{m_2}{n} = P(B)$ , отримуємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

*Наслідок.* Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій, немає значення якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

або

$$P \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.12)$$

*Приклад 1.3.* У закритому штативі міститься 30 пробірок: 10 – із червоним розчином, 5 – із блакитним і 15 прозорих. Знайти ймовірність появи кольорової пробірки.

*Розв'язок.* Поява пробірки з кольоровим розчином означає появу пробірки з червоним або блакитним розчином.

Ймовірність появи пробірки з червоним розчином (подія  $A$ )

$$\text{дорівнює: } P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Імовірність появи пробірки з блакитним розчином (подія  $B$ ) дорівнює:  $P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ .

Події  $A$  та  $B$  несумісні (поява пробірки одного кольору виключає появу пробірки другого кольору), тому можна використати теорему додавання. Імовірність, яку запитують у задачі, дорівнює:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Система несумісних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  складає **повну групу**, якщо в дослідах **обов'язково** наступить одна з цих подій. Із визначення зрозуміло, що події, які утворюють повну групу, єдино можливі та попарно несумісні.

Нехай кинута гральна кістка. Тоді подія  $A_1$  – поява цифри "1", подія  $A_2$  – поява цифри "2", ..., подія  $A_6$  – поява цифри "6".

Система подій  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  є повною групою, тому що під час підкидання кубика він обов'язково впаде на якусь грань.

Оскільки поява однієї з подій повної групи є достовірною, а ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, то має місце рівняння:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1.$$

Отже, сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (1.13)$$

**Приклад 1.4.** Викадач отримує пакети з контрольними роботами від груп  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Імовірність отримання пакета від групи  $A$  дорівнює  $0,7$ , від групи  $B$  –  $0,2$ . Знайти ймовірність того, що черговий пакет буде отримано від групи  $C$ .

**Розв'язок.** Події "отримання пакета від групи  $A$ ", "отримання пакета від групи  $B$ " та "отримання пакета від групи  $C$ " утворюють повну групу подій, тому сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці:  $0,7 + 0,2 + p = 1$ .

Імовірність, що шукають, дорівнює:  $p = 1 - 0,9 = 0,1$ .

Якщо лише дві події складають повну групу, то вони є *протилежними*. Якщо одну з двох протилежних подій позначити через  $A$ , то другу можна позначити через  $\bar{A}$ . Для позначення ймовірності протилежної події часто використовують позначку  $q$  (зберігаючи позначення  $p$  для прямої події).

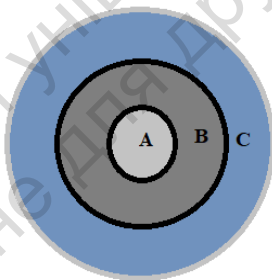
Якщо складання або не складання заліку зі статистичних методів – це протилежні події і пряма подія  $A$  – "залік складено", а протилежна подія  $\bar{A}$  – "залік не складено". Ураховуючи формулу (1.13), отримаємо, що **сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці**, оскільки дві протилежні події складають повну групу. Отже для протилежних подій маємо:

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1,$$

або

$$p + q = 1. \quad (1.14)$$

*Приклад 1.5.* На рис. 1.3 зображена мішень із трьома зонами  $A, B, C$ . Імовірність потраплення при одиничному пострілі в першу зону  $p(A) = 0,15$ ; у другу –  $p(B) = 0,23$ ; у третю –  $p(C) = 0,17$ . Знайти ймовірність промаху  $p(\bar{D})$ .



**Рис. 1.3.** Мішень для стрільянини з трьома зонами

*Розв'язок.* Спочатку знайдемо за теоремою додавання ймовірність влучення:

$$p(D) = p(A) + p(B) + p(C) = 0,15 + 0,23 + 0,17 = 0,55.$$

Тоді з рівняння (1.14) знаходимо ймовірність промаху.

$$p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0,55 = 0,45.$$

## 1.4. Принцип практично неможливої малоймовірної події

Під час розв'язку багатьох задач, що виникають на практиці, доводиться мати справу з подіями, імовірність яких близька до нуля. Чи можна вважати, що малоймовірна подія  $A$  в одному дослідженні не відбудеться? Такого висновку зробити не можна, тому що не виключено, хоч і малоймовірно, що подія  $A$  все ж таки відбудеться.

Здавалося б, що появу чи не появу малоймовірної події в одиничному досліді передбачити неможливо, але життєвий досвід показує, що малоймовірні події в одиничному досліді в більшості випадків не відбуваються. Спираючись на цей факт, формулюють **"принцип практично неможливих малоймовірних подій"**: якщо випадкова подія має дуже малу ймовірність, то практично можна вважати, що в одиничному досліді ця подія не відбудеться.

Природно виникає питання: наскільки малою повинна бути ймовірність події, щоб можна було вважати неможливим її появу в одиничному досліді? На це питання не можна дати однозначної відповіді. Наприклад, якщо ймовірність того, що парашут не відкриється під час стрибка, дорівнює 0,01, то такі парашути використовувати неприпустимо. Якщо ж ймовірність того, що потяг прибуде із запізненням, дорівнює 0,01, то можна практично бути впевненим, що потяг прибуде вчасно.

Підкреслимо, що розглянутий тут принцип дозволяє робити передбачення не лише про події, що мають малу ймовірність, але і про події, імовірність яких близька до одиниці. Справді, якщо подія  $A$  має ймовірність близьку до нуля, то ймовірність протилежної події  $\bar{A}$  близька до одиниці. З іншого боку, не поява події  $A$  означає появу події  $\bar{A}$ . Отже, із принципу неможливості малоймовірної події випливає такий важливий *наслідок*: якщо випадкова подія має ймовірність дуже близьку до одиниці, то практично можна вважати, що в одиничному досліді ця подія наступить. Зрозуміло, що і тут питання про те, яку ймовірність вважати близькою до одиниці, залежить від суті задачі.

## 1.5. Складні події.

### Теорема множення ймовірностей

Добутком  $C = A \cdot B$  двох подій  $A$  і  $B$  називають подію, яка полягає в одночасній появі обох сумісних подій  $A$  і  $B$ . Наприклад, якщо подія  $A$  – це прихід лектора в аудиторію, а  $B$  – це наявність в аудиторії студентів, то подія  $C$  – це лекція, яка відбудеться.

Ще один приклад для розуміння поняття добутку двох подій. Якщо в коробці містяться стандартні та нестандартні деталі, які виготовлені заводами № 1 та № 2, подія  $A$  – це поява стандартної деталі, подія  $B$  – це поява нестандартної деталі,  $C$  – це поява деталі, яка виготовлена заводом № 1,  $D$  – це поява деталі, яка виготовлена заводом № 2, то складна подія  $AC$  – це поява стандартної деталі, яка вироблена заводом № 1.

Сумісні події  $A$  і  $B$  можуть бути залежними, або незалежними.

Дві події називаються **незалежними**, якщо ймовірність однієї з них не залежить від появи, чи не появи іншої. Наприклад, якщо монету підкинуто двічі, то ймовірність появи герба в першому досліді (подія  $A$ ) не залежить від появи чи не появи герба у другому досліді (подія  $B$ ). Ймовірність появи герба у другому досліді не залежить від результатів першого досліді. Отже, події  $A$  та  $B$  – незалежні.

*Приклад 1.7.* У коробці міститься 5 білих і 3 чорних склянки. Із коробки навмання виймають одну склянку. Зрозуміло, що ймовірність появи білої склянки (подія  $A$ ) дорівнює  $\frac{5}{8}$ . Склянку, що

вийняли, поклали назад у коробку й дослід повторили. Ймовірність появи білої склянки при другому досліді (подія  $B$ ), як і раніше дорівнює  $\frac{5}{8}$  і не залежить від результату першого досліді.

У свою чергу, ймовірність появи білої склянки під час першого досліді не залежить від результату другого досліді. Отже, події  $A$  та  $B$  є незалежними.

Якщо білу склянку після витягання в першому досліді відставити в бік, то ймовірність витягнути білу склянку в другому

досліді вже не дорівнюватиме  $\frac{5}{8}$ , вона зміниться і стане  $\frac{4}{7}$ . А якщо в першому досліді витягнута була чорна склянка і відставлена в бік, то ймовірність витягання в другому досліді білої склянки дорівнюватиме  $\frac{5}{7}$ . Отже, ймовірність витягання білої склянки в другому досліді залежатиме від результатів першого досліді. Це приклад *залежних* подій.

*Приклад 1.8.* У коробці розташовується 100 капілярів: 80 стандартних і 20 нестандартних. Навмання беруть один капіляр, не повертаючи його назад у коробку. Якщо з'явився стандартний капіляр (подія  $A$ ), то ймовірність появи стандартного капіляру при другому досліді (подія  $B$ ) дорівнює  $P(B) = \frac{79}{99}$ ; якщо ж в першому досліді вибрано нестандартний капіляр, то ймовірність  $P(B) = \frac{80}{99}$ . Отже, ймовірність появи події  $B$  залежить від появи чи не появи події  $A$ . Тут події  $A$  та  $B$  – залежні.

Розглянемо добуток двох незалежних подій.

Нехай події  $A$  та  $B$  незалежні. Як знайти ймовірність добутку цих подій  $A$  та  $B$ ? Відповідь на це питання дає теорема множення.

*Теорема.* Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.15)$$

*Доведення.* Вводимо позначення:  $n$  – кількість можливих елементарних випадків дослідів, у яких подія  $A$  з'являється чи не з'являється;  $n_1$  – кількість випадків, що сприятливі події  $A$  ( $n_1 \leq n$ );  $m$  – кількість можливих елементарних випадків дослідів, у яких подія  $B$  з'являється чи не з'являється;  $m_1$  – кількість випадків, що сприятливі події  $B$  ( $m_1 \leq m$ ).

Загальне число можливих елементарних випадків дослідів (у яких настає  $A$ ,  $B$ , чи  $A$  та  $\bar{B}$ , чи  $\bar{A}$  та  $B$ , чи  $\bar{A}$  та  $\bar{B}$ ) дорівнює  $nm$ . Справді, кожен із  $n$  випадків, у яких подія  $A$  з'являється чи не з'являється, може бути сумісним із кожним з  $m$  випадків, у



яких подія  $B$  з'являється чи не з'являється. Із цієї кількості  $n_1 m_1$  дослідів сприяють одночасній появі подій  $A$  та  $B$ . Справді, кожен із  $n_1$  дослідів, що сприяють події  $A$ , може поєднуватися з кожним із  $m_1$  дослідів, що сприяють події  $B$ . Імовірність одночасної появи подій  $A$  та  $B$  дорівнює:  $P(AB) = \frac{n_1 m_1}{nm} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m}$ . Якщо брати до

уваги, що  $\frac{n_1}{n} = P(A)$  та  $\frac{m_1}{m} = P(B)$ , маємо:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Для того, щоб узагальнити теорему множення на декілька подій, введемо поняття незалежних подій у сукупності.

Декілька подій називаються *незалежними в сукупності*, якщо кожна з них у будь-якій комбінації з іншими подіями (які складаються з усіх інших подій чи з їхньої частини) є подія незалежна. Наприклад, якщо події  $A_1$ ,  $A_2$  та  $A_3$  незалежні в сукупності, то незалежними є події:  $A_1$  та  $A_2$ ,  $A_1$  та  $A_3$ ,  $A_2$  та  $A_3$ ,  $A_1 A_2$  та  $A_3$ ,  $A_1 A_3$  та  $A_2$ ,  $A_2 A_3$  та  $A_1$ .

Підкреслимо, що якщо декілька подій незалежні попарно, то звідси не випливає їхня незалежність у сукупності. У цьому сенсі вимога незалежності подій у сукупності більш жорстка, ніж вимога їхньої попарної незалежності.

*Наслідок.* Імовірність сумісної появи декількох подій, які незалежні в сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n). \quad (1.16)$$

*Зауваження.* Якщо події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  незалежні в сукупності, то і протилежні їм події  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  також незалежні в сукупності.

*Приклад 1.9.* Знайти ймовірність сумісної появи решок при одному киданні двох монеток.

*Розв'язок.* Імовірність появи решки для першої монети (подія  $A$ ) дорівнює  $P(A) = \frac{1}{2}$ . Імовірність появи решки для другої монети

(подія  $B$ ) дорівнює  $P(B) = \frac{1}{2}$ . Оскільки події  $A$  та  $B$  незалежні, то необхідна ймовірність розраховується за теоремою множення  $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

*Приклад 1.10.* Маємо 3 ящики, у яких міститься по 10 склянок із розчинами. У першому ящику 8, у другому – 7, у третьому – 9 стандартних розчинів, інші розчини – нестандартні. Із кожного ящика навмання виймають по одній склянці. Знайти ймовірність того, що із трьох ящиків будуть витягнуті склянки (по одній з кожного ящика) зі стандартними розчинами.

*Розв'язок.* Ймовірність того, що з першого ящика взято склянку зі стандартним розчином (подія  $A$ ), дорівнює  $P(A) = \frac{8}{10} = 0,8$ .

Ймовірність того, що з другого ящика взято склянку зі стандартним розчином (подія  $B$ ), дорівнює  $P(B) = \frac{7}{10} = 0,7$ . Ймовірність

того, що з третього ящика дістали склянку зі стандартним розчином (подія  $C$ ), дорівнює  $P(C) = \frac{9}{10} = 0,9$ . Оскільки події  $A$ ,  $B$  і

$C$  незалежні в сукупності, то необхідна ймовірність (за теоремою множення) дорівнює

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Припустимо, що внаслідок досліджень може з'явитися  $n$  подій незалежних у сукупності. Як знайти ймовірність того, що наступить хоча б одна з цих подій? Відповідь на це питання дає така теорема.

*Теорема.* Ймовірність появи хоча б однієї події  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею й добутком ймовірностей протилежних подій  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ .

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1 - p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot p(\bar{A}_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n. \quad (1.17)$$

*Доведення.* Позначимо через  $A$  подію, що складається з появи хоча б однієї з подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Події  $A$  та  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$

(жодна з подій не відбулася) протилежні, значить, сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці:  $p(A) + p(\bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_n) = 1$ . Використовуючи (1.14) і теорему множення, отримуємо:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_n) = 1 - p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot p(\bar{A}_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n.$$

*Окремий випадок.* Якщо події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  мають однакову ймовірність, яка дорівнює  $p$  (рівноймовірні події), то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій дорівнює:

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (1.17)$$

*Приклад 1.11.* Імовірність влучення в ціль при стрільбі з трьох гармат дорівнюють: 0,8; 0,7; 0,9, відповідно. Знайти ймовірність хоча б одного влучення (подія  $A$ ) при одному залпі з усіх гармат.

*Розв'язок.* Імовірність влучення в ціль кожною гарматою не залежить від результатів стрільби з інших гармат, тому подія  $A_1$  (влучення першою гарматою),  $A_2$  (влучення другою гарматою) і  $A_3$  (влучення третьою гарматою) незалежні в сукупності. Імовірності подій, які протилежні подіям  $A_1, A_2$  та  $A_3$  (тобто ймовірності промахів), відповідно дорівнюють:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Імовірність, що запитуються, дорівнює:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

Тепер розглянемо операцію множення для випадку, коли події  $A$  та  $B$  залежні. З визначення залежних подій випливає, що ймовірність однієї події залежить від появи чи не появи іншої. Тому, якщо нас цікавить ймовірність, наприклад, події  $B$ , то важливо знати, чи відбулася подія  $A$ .

*Умовною ймовірністю*  $P_A(B)$  називається ймовірність події  $B$ , яку розраховують із припущення, що подія  $A$  вже відбулася.

*Приклад 1.12.* У коробці міститься 3 білі та 3 чорні кулі. З коробки двічі виймають навмання по одній кулі, не повертаючи їх назад у коробку. Знайти ймовірність появи білої кулі при другому

досліді (подія  $B$ ), якщо при першому досліді була вийнята чорна куля (подія  $A$ ).

*Розв'язок.* Після першого досліді в коробці залишилось 5 куль, із них 3 білі. Умовна ймовірність, яку шукають, дорівнює

$$P_A(B) = \frac{3}{5}.$$

*Зауваження.* З визначення незалежних подій наслідком є те, що поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої. Тому для незалежних подій справедливим є рівняння:

$$P_A(B) = P(B) \text{ та } P_B(A) = P(A).$$

Отже, умовні ймовірності незалежних подій дорівнюють їхнім безумовним ймовірностям.

Нехай події  $A$  та  $B$  залежні, причому ймовірності  $P(A)$  та  $P(B)$  відомі. Як знайти ймовірність добутку цих подій, тобто ймовірність того, що з'явиться і подія  $A$ , і подія  $B$ ?

Відповідь на це питання дає теорема множення залежних подій.

*Теорема.* Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, яка розраховується із припущення, що перша подія вже відбулася.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (1.18)$$

*Доведення.* Позначимо:  $n$  – кількість можливих елементарних результатів дослідів, у яких подія  $A$  відбулася чи не відбулася;  $n_1$  – кількість результатів, що сприятливі події  $A$  ( $n_1 \leq n$ );  $m$  – кількість елементарних результатів дослідів, у яких відбувається подія  $B$ , із припущенням, що подія  $A$  вже відбулася. Тобто ці результати сприяють появи події  $AB$  ( $m \leq n_1$ ). Ймовірність сумісної появи подій  $A$  та  $B$  дорівнює:

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1}.$$

Якщо взяти до уваги, що

$$\frac{n_1}{n} = P(A) \text{ та } \frac{m}{n_1} = P_A(B),$$

то отримуємо результат:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

*Зауваження.* Якщо застосувати формулу (1.18) до події  $BA$ , маємо  $P(BA) = P(B) \cdot P_B(A)$ .

Оскільки подія  $BA$  не відрізняється від події  $AB$ :

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (1.19)$$

Якщо порівняти формули (1.18) і (1.19), то можна записати рівняння

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (1.20)$$

*Наслідок.* Ймовірність сумісної появи декількох залежних подій дорівнює добутку ймовірності одного з них на умовну ймовірність усіх інших, причому ймовірність кожної наступної події розраховується з умови, що всі попередні події вже відбулися:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n),$$

де  $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$  – ймовірність події  $A_n$ , яка розраховується з умови, що події  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}$  відбулися. Отже, для трьох залежних подій маємо:  $P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$ . Зазначимо, що порядок, у якому розташовані події, може бути вибрано довільно, тобто немає значення, яка подія перша, яка друга і так далі.

*Приклад 1.13.* У ящику лежать 3 білі та 7 червоних куль. Студент навмання взяв одну кулю, а потім другу. Знайти ймовірність того, що перша куля має білий колір, а друга – червоний.

*Розв'язок.* Ймовірність того, що перша куля має білий колір (подія  $A$ ), дорівнює  $P(A) = \frac{3}{10}$ .

Ймовірність того, що друга куля має червоний колір (подія  $B$ ), розраховується із припущення, що перша куля мала білий колір, тобто умовна ймовірність дорівнює  $P_A(B) = \frac{7}{9}$ . Ймовірність, яку розраховуємо за теоремою множення ймовірностей залежних подій, дорівнює:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

Зазначимо, що зі збереженням позначень, можна легко знайти

$$P(B) = \frac{7}{10}, \quad P_B(A) = \frac{3}{9}, \quad P(B) \cdot P_B(A) = \frac{7}{30}.$$

## 1.6. Складні події. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Формула повної ймовірності

Нехай події  $A$  та  $B$  сумісні, причому відомі ймовірності цих подій і ймовірності їхньої сумісної появи. Як знайти ймовірність події  $C = A + B$ , яка складається з появи хоча б однієї з подій  $A$  чи  $B$ ? Відповідь на це питання дає теорема додавання ймовірностей сумісних подій.

*Теорема.* Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, зменшеній на ймовірність добутку цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.21)$$

*Доведення.* Подія  $A$  буде виконана, якщо з'явиться одна із двох подій  $\bar{A}B$  чи  $AB$ . За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій і рівнянням (1.11) маємо:

$$P(A) = P(\bar{A}B) + P(AB) \Rightarrow P(\bar{A}B) = P(A) - P(AB). \quad (1.21,а)$$

Аналогічними міркуваннями можна записати відповідні рівняння, розглядаючи подію  $B$ , маємо:

$$P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB) \Rightarrow P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB). \quad (1.21,б)$$

Подія  $(A + B)$  реалізується, якщо з'явиться одна з таких подій:  $\bar{A}B$ ,  $A\bar{B}$  чи  $AB$ . За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій:  $P(A + B) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) + P(AB)$ .

Підставляючи в це рівняння вирази (а) та (б), отримуємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

*Зауваження.* При використанні отриманої формули (1.21) треба мати на увазі, що  $A$  та  $B$  можуть бути як незалежними, так і залежними.

Для незалежних подій:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ ;

для залежних подій:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$ .

*Зауваження.* Якщо події  $A$  та  $B$  несумісні, то їхня одночасна поява (добуток) є неможливою подією, тому  $P(AB) = 0$ . Тоді формула (1.21) для несумісних подій набуває вигляду:  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ , тобто отримуємо формулу (1.11) теореми додавання для несумісних подій. Отже, формула (1.21) справедлива як для сумісних, так і для несумісних подій.

*Приклад 1.14.* Імовірності влучення в мішень при стрільбі з першої та другої гармати дорівнюють 0,7 і 0,8, відповідно. Знайти ймовірність влучення хоча б однією гарматою при одному пострілі з обох гармат.

*Розв'язок.* Імовірність влучення в ціль кожною з гармат не залежить від результату стрільби з другої гармати, тому ймовірність події  $AB$  (влучення одночасно обома гарматами) за теоремою множення для незалежних подій дорівнює:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Імовірність, яку потрібно розрахувати, шукаємо за рівнянням (1.21):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94.$$

*Зауваження.* Оскільки в цьому прикладі події  $A$  та  $B$  незалежні, то можна було б скористатися формулою

$$P = 1 - q_1 \cdot q_2.$$

Справді, імовірності подій, протилежних подіям  $A$  та  $B$ , тобто ймовірності промахів, відповідно, дорівнюють:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Імовірність того, що при одному пострілі хоча б одна гармата влучить, дорівнює:

$$P = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94.$$

Як і можна було сподіватися, отримали аналогічний результат.

Нехай подія  $A$  може з'явитися за умови появи однієї з несумісних подій  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Припустимо, що відомі ймовірності цих подій  $B_1, B_2, \dots, B_n$  та умовні ймовірності події  $A$ :  $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$ . Чи можна знайти ймовірність події самої події  $A$ ? Відповідь на це питання дає така теорема.

*Теорема.* Імовірність події  $A$ , яка може відбутися лише за умови появи однієї з несумісних подій  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події  $A$ .

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A). \quad (1.22)$$

*Доведення.* За умовою подія  $A$  може відбутися, якщо станеться одна з несумісних подій  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Це те ж саме, що і виконання однієї, немає значення якої, із несумісних подій  $B_1A, B_2A, \dots, B_nA$ . Використовуючи для розрахунків імовірності події  $A$  теорему додавання, отримуємо:

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \dots + P(B_nA). \quad (1.22,а)$$

Залишається розрахувати кожен із доданків у рівності (1.22,а). За теоремою добутку ймовірностей залежних подій маємо:

$$P(B_1A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A);$$

$$P(B_2A) = P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)$$

.....

$$P(B_nA) = P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Підставляючи праві частини цих рівнянь у рівність (1.22,а), отримуємо **формулу повної ймовірності**:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

*Приклад 1.15.* Маємо дві коробки деталей. У першій коробці знаходиться 10 деталей, а у другій – 15. Імовірність того, що витягнута деталь із першої коробки стандартна, дорівнює 0,8, а ймовірність витягання стандартної деталі з другої коробки – 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь, яка взята навмання (з навмання взятої коробки), є стандартною.

*Розв'язок.* Позначимо через  $A$  таку подію – деталь, що витягли, є стандартною. Деталь може бути витягнутою з першої коробки (подія  $B_1$ ), чи з другої (подія  $B_2$ ).

Імовірність того, що деталь витягнуть із першої коробки, дорівнює  $P(B_1) = \frac{1}{2}$ .



Імовірність того, що деталь витягнуть із другої коробки, аналогічно, дорівнює  $P(B_2) = \frac{1}{2}$ .

Умовна ймовірність того, що з першої коробки буде витягнута стандартна деталь, дорівнює  $P_{B_1}(A) = 0,8$ . Умовна ймовірність того, що з другої коробки буде витягнута стандартна деталь, дорівнює:  $P_{B_2}(A) = 0,9$ .

Необхідну ймовірність того, що витягнута навмання деталь буде стандартною, шукаємо за формулою для повної ймовірності:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85.$$

## 1.7. Імовірність гіпотез.

### Теорема Баєса

Подія  $A$  може відбутися за умови появи однієї з несумісних подій  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Оскільки заздалегідь невідомо, яка з цих подій станеться, то їх називають *гіпотезами*. Як уже зазначалось, ймовірність появи події  $A$  визначається за формулою повної ймовірності (1.22):

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Припустимо, що провели дослідження, унаслідок якого з'явилась подія  $A$ . Поставимо за мету визначити, як зміниться (у зв'язку з тим, що подія  $A$  вже відбулася) ймовірності гіпотез. Іншими словами, будемо шукати умовні ймовірності:  $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$ .

Знайдемо спочатку умовну ймовірність  $P_A(B_1)$ . За теоремою множення маємо:

$$P(AB_1) = P(A) \cdot P_A(B_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) \Rightarrow P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Якщо в отриманому виразі провести заміну  $P(A)$  за формулою повної ймовірності (1.22), то отримаємо:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}.$$

Аналогічно виводяться формули, що визначають умовні ймовірності інших гіпотез, тобто умовна ймовірність будь-якої гіпотези  $B_i (i = 1, 2, \dots, n)$  може розраховуватися за формулою:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}. \quad (1.23)$$

Отримана формула називається **формулою Баєса** (за прізвищем англійського математика, який її вивів у 1764 р.). Формула Баєса дозволяє розрахувати ймовірності гіпотез після того, як стає відомим результат дослідження.

**Приклад 1.16.** Деталі, що були виготовлені цехом заводу, потрапляють для перевірки їх на стандартність до одного з двох контролерів. Імовірність того, що деталь потрапить до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Імовірність того, що деталь визначиться як стандартна першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Деталь під час перевірки визначилась як стандартна. Знайти ймовірність того, що цю деталь перевіряв перший контролер.

**Розв'язок.** Позначимо через  $A$  подію, що деталь визначена як стандартна. Можна зробити два припущення:

- 1) деталь перевіряв перший контролер (гіпотеза  $B_1$ ),
- 2) деталь перевіряв другий контролер (гіпотеза  $B_2$ ).

Імовірність того, що деталь перевіряв перший контролер, знайдемо за формулою Баєса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}.$$

За умовою маємо:  $P(B_1) = 0,6$  (імовірність того, що деталь потрапить до першого контролера);  $P(B_2) = 0,4$  (імовірність того, що деталь попаде до другого контролера);  $P_{B_1}(A) = 0,94$  (імовірність того, що деталь визначиться як стандартна першим контролером);

$P_{B_2}(A) = 0,98$  (імовірність того, що деталь визначиться як стандартна другим контролером). Імовірність, яку треба визначити, дорівнює:

$$P_A(B_1) = \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,59.$$

Унаслідок дослідження ймовірність гіпотези  $B_1$  дорівнює 0,6, а після того, як став відомим результат дослідження, імовірність цієї гіпотези (точніше умовна ймовірність) змінилася та стала дорівнювати 0,59. Отже, використання формули Байеса дозволило переоцінити ймовірність розглянутої гіпотези.

## 1.8. Теорема про повторення дослідів. Формула Бернуллі

Якщо виконується декілька дослідів, причому ймовірність події  $A$  в кожному досліді не залежить від результатів інших, то такі досліді називаються незалежними відносно події  $A$ .

У різних незалежних дослідях подія  $A$  може мати або різні ймовірності, або одну й ту ж саму ймовірність. Далі будемо розглядати лише такі незалежні досліді, у яких подія  $A$  має одну й ту ж ймовірність.

У цьому розділі розглянемо варіант одночасного застосування теорем додавання і множення. Цей варіант реалізовується в теоремі про повторення дослідів.

Проводимо  $n$  незалежних дослідів, у кожному з яких подія  $A$  може з'явитися чи не з'явитися. Будемо вважати, що ймовірність події  $A$  в кожному досліді одна й та ж, тобто дорівнює  $P$ . Відповідно, імовірність того, що подія  $A$  не з'явиться в кожному досліді також стала й дорівнює  $q = 1 - P$ .

Поставимо за мету розрахувати ймовірність того, що при  $n$  дослідях подія  $A$  з'явиться рівно  $k$  разів та, відповідно, не з'явиться  $(n - k)$  разів.

Важливо підкреслити, що не вимагається, щоб подія  $A$  повторилася рівно  $k$  разів у визначеній послідовності. Наприклад, якщо йдеться про появу події  $A$  тричі в чотирьох дослідях, то можливі

такі складні події:  $AAAA$ ,  $AA\bar{A}\bar{A}$ ,  $\bar{A}\bar{A}AA$  та  $\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}$ . Запис  $AAAA$  означає, що в першому, другому та третьому дослідах подія  $A$  з'явилась, а в четвертому досліді не з'явилась, тобто відбулася протилежна подія  $\bar{A}$ . Інші записи мають відповідний зміст. Імовірність, що шукаємо, записуватимемо як  $P_n(k)$ . Наприклад, запис  $P_5(3)$  означає ймовірність того, що в п'яти дослідах подія з'явилась рівно тричі, і, відповідно, не з'явилась двічі. Поставлену задачу розв'язує так звана формула Бернуллі.

*Виведення формули Бернуллі.* Імовірність складної події, для якої в  $n$  дослідах подія  $A$  з'являється рівно  $k$  разів і не з'являється  $(n-k)$  разів, за теоремою множення ймовірностей незалежних подій, дорівнює:

$$P' = \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot p \dots p}_{k \dots \text{разів}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \dots q}_{(n-k) \dots \text{разів}} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Оскільки поява події  $A$  відбувається рівно  $k$  разів, а не "хоча б  $k$  разів", то решта  $(n-k)$  разів подія не повинна з'явитись, що й дає в добутку наявність множників, що містять  $q$ .

Таких складних подій може бути стільки, скільки можна скласти поєднань із  $n$  елементів по  $k$  елементів, тобто  $C_n^k$ . Оскільки ці складні події несумісні, то за теорією додавання ймовірностей подій, ця ймовірність дорівнює сумі ймовірностей усіх можливих складних подій. Затим що, імовірності всіх цих складних подій однакові, то ймовірність, яку шукаємо, (поява  $k$  разів події  $A$  у  $n$  дослідах) дорівнює ймовірності однієї складної події, яку потрібно помножити на їхнє число:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \quad (1.24)$$

Отримана формула називається **формулою Бернуллі**.

Звертаємо увагу на те, що при виведенні цієї формули добуток однакових множників приводить до піднесення до степеня, а сума однакових доданків – до множення на число  $C_n^k$ .

*Приклад 1.17.* Імовірність того, що використання електроенергії хімічним факультетом упродовж однієї доби не перевищить встановленої норми, дорівнює  $p = 0,75$ . Знайти ймовірність того,

що в найближчі шість діб використання електроенергії впродовж чотирьох діб не перевищать норми.

*Розв'язок.* Імовірність нормального використання електроенергії впродовж кожних із шести діб є сталою величиною й дорівнює  $p = 0,75$ . Отже, імовірність перевитрат електроенергії в кожную добу також стала та дорівнює  $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$ .

Необхідна ймовірність за формулою Бернуллі дорівнює:

$$P_0(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = 0,30.$$

Поставимо собі завдання знайти таке значення  $k = k_{\max}$ , за якого ймовірність  $P_n(k)$  – максимальна. Число  $k_{\max}$  називають **найімовірнішим числом появи події**, якщо ймовірність того, що подія  $A$  з'явиться в цих дослідженнях рівно  $k_{\max}$  разів, буде більшою (чи хоча б не меншою) за ймовірність інших можливих результатів досліджень.

*Приклад 1.18.* Знайти найімовірніше число появи події  $A$  в 10 дослідах, якщо ймовірність появи події  $A$  в кожному дослідженні  $p = \frac{2}{3}$ .

*Розв'язок.* Кожну з наведених нижче ймовірностей розраховували за формулою Бернуллі:

$$P_{10}(0) \approx 0,00002; \quad P_{10}(1) \approx 0,00034; \quad P_{10}(2) \approx 0,00305;$$

$$P_{10}(3) \approx 0,01626; \quad P_{10}(4) \approx 0,05690; \quad P_{10}(5) \approx 0,13656;$$

$$P_{10}(6) \approx 0,22760; \quad P_{10}(7) \approx 0,26012; \quad P_{10}(8) \approx 0,19509;$$

$$P_{10}(9) \approx 0,08671; \quad P_{10}(10) \approx 0,01734.$$

Імовірність того, що подія  $A$  в 10 дослідах з'явиться рівно сім разів – більша за ймовірності інших результатів досліджень. Отже, найімовірніше число появи події  $k_{\max} = 7$ .

Наведений приклад показує, що пошук  $k_{\max}$  шляхом багатократного використання формули Бернуллі потребує доволі тривалих розрахунків. Природно виникає задача знайти інший, більш простий шлях визначення найімовірнішого числа появи події.

Для цього спочатку з'ясуємо, як зміниться ймовірність  $P_n(k)$  із зміною  $k$  при сталому  $n$ . Нехай виконується  $n$  незалежних

досліджень, у кожному з яких подія  $A$  може з'явитися, чи не з'явитися. Будемо вважати, що ймовірність появи події  $A$  в кожному досліді стала та дорівнює  $P$ . Числа  $n$  та  $p$ , а отже і  $q = 1 - p$

, вважатимемо відомими.

Переконаємось у тому, що зі зростанням числа  $k$  імовірність  $P_n(k)$  спочатку збільшується, а потім після досягнення найбільшого значення зменшується. З цією метою виражаємо величину

відношення  $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$  через числа  $n, p, q, k$ :

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}. \quad (1.24,а)$$

Розглянемо три можливі випадки.

Нехай  $P_n(k+1) > P_n(k)$ , тоді чисельник у виразі (1.24,а) повинен бути більшим за знаменник:

$$n \cdot p - k \cdot p > k \cdot q + q \Rightarrow k \cdot q + k \cdot p < n \cdot p - q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot \left( \underbrace{p+q}_{\text{дорівнює } 1} \right) < n \cdot p - q \Rightarrow k < n \cdot p - q.$$

Отже, поки ціле число  $k$  збільшується і водночас залишається меншим за число  $n \cdot p - q$ , зростатиме ймовірність  $P_n(k)$ .

За умови  $k = n \cdot p - q$  чисельник і знаменник виразу (а) вирівнюються  $P_n(k+1) = P_n(k)$ . Отже, якщо ціле число  $k$  дорівнює числу  $(n \cdot p - q)$  (обов'язково цілому), то ймовірності того, що подія  $A$  відбудеться  $k$ , чи  $k+1$  разів у  $n$  дослідях, дорівнюють одна одній. Оскільки  $p$  і  $q$  менші за одиницю, то число  $(n \cdot p - q)$  лише в певних випадках буде цілим.

За умови, що  $k > n \cdot p - q$  чисельник у виразі (а) буде меншим за знаменник і  $P_n(k+1) < P_n(k)$ . Отже, якщо  $k$  перевищує  $(n \cdot p - q)$ , то зі зростанням  $k$  відповідне значення  $P_n(k)$  зменшується аж до  $P_n(n)$ .

Отже, зі зростанням числа  $k$  ймовірності  $P_n(k)$  підвищуються (при  $k < n \cdot p - q$ ), потім вони зменшуються (при  $k > n \cdot p - q$ ). Якщо ж число  $k = n \cdot p - q$  ціле, то зі збільшенням "виняткового значення" на одиницю, ймовірності  $P_n(k)$  та  $P_n(k + 1)$  матимуть однакові значення.

Використовуючи визначення найімовірнішого числа появи події, отримуємо, що при  $k = k_{\max}$  ймовірність  $P_n(k_{\max})$  досягає найбільшого значення, а при  $k > k_0$  ймовірність  $P_n(k)$  зменшується.

Якщо  $n \cdot p - q$  не є цілим числом, то можна записати нерівність:  $P_n(k_0 + 1) < P_n(k_0)$ . Водночас, як було показано вище,  $k_0 > n \cdot p - q$ . Якщо ж  $k_0$  набуває "виняткового значення", що дорівнює  $n \cdot p - q$ , то  $P_n(k + 1) = P_n(k)$ . Загалом має місце нерівність  $P_n(k_0 + 1) \leq P_n(k_0)$ , яка визначає таку нерівність:

$$k_0 \geq n \cdot p - q. \quad (1.25)$$

Вираз (1.25) дає нижню межу для числа  $k_{\max}$ .

Аналогічні міркування показують, що нерівність  $P_n(k_{\max} - 1) < P_n(k_{\max})$  дає нерівність:

$$k_0 \leq n \cdot p + p, \quad (1.26)$$

яке дає верхню межу числа  $k_{\max}$ . Якщо об'єднати рівняння (1.25) і (1.26), то отримуємо:

$$n \cdot p - q \leq k_0 \leq n \cdot p + p. \quad (1.27)$$

Ця подвійна нерівність і слугує для визначення найімовірнішого числа появи події.

*Зауваження 1.* Незалежно від того, чи є число  $n \cdot p - q$  цілим, чи ні, різниця чисел  $n \cdot p + p$  і  $n \cdot p - q$  дорівнює одиниці:

$$(n \cdot p + p) - (n \cdot p - q) = p + q = 1.$$

Із цього зауваження можна зробити такі висновки:

а) якщо число  $n \cdot p - q$  не є цілим, то подвійна нерівність (1.27) визначає одне значення  $k_{\max}$  (у проміжку поміж двома нецілими значеннями, що відрізняються на одиницю, існує лише одне ціле число);

б) якщо число  $n \cdot p - q$  є цілим, то подвійна нерівність (1.27) визначає два значення найімовірнішого числа; позначимо менше з них через  $k_{\max}$ , а більше з них через  $k_{\max} + 1$ .

*Зауваження 2.* Якщо добуток  $n \cdot p$  є цілим числом, то  $k_{\max}$  дорівнює  $n \cdot p$ . Це твердження виходить із подвійної нерівності (1.27).

*Зауваження 3.* Не треба думати, що ймовірність  $P_n(k)$  найімовірнішого числа появи події має велике значення. Наприклад, якщо монету кинути 100 разів, то найімовірніше число появи герба дорівнює  $k_{\max} = 100 \cdot 0,5 = 50$ . Імовірність же  $P_{100}(50)$  дорівнює лише 0,08.

*Приклад 1.20.* Проводять шість незалежних досліджень, у кожному з яких ймовірність появи події  $A$  дорівнює  $p = 0,2$ . Знайти найімовірніше число появи події  $A$ .

*Розв'язок.* Найімовірніше число появи події  $A$  знайдемо з подвійної нерівності:  $n \cdot p - q \leq k_0 \leq n \cdot p + p$ . За умовою задачі,  $n = 6$ ;  $p = 0,2$ ;  $q = 1 - 0,2 = 0,8$ , отримуємо:

$$6 \cdot 0,2 - 0,8 \leq k_{\max} \leq 6 \cdot 0,2 + 0,2.$$

Звідки маємо:  $0,4 \leq k_{\max} \leq 1,4$ . Поміж числами 0,4 і 1,4 розташовується лише одне ціле число – одиниця. Тому найімовірніше число появи події  $A$  дорівнює  $k_{\max} = 1$ .

## Питання для самостійного повторення

*Замість крапок запишіть таке продовження тексту, щоб отримати правильне визначення поняття або твердження. Де можливо запишіть відповідну формулу.*

1. Теорія ймовірностей – це ...
2. Подія – це ...
3. Випадковою називається подія, яка ...
4. Вірогідною називається подія, яка ...
5. Неможливою називається подія, яка ...
6. Події  $A$  і  $B$  називаються рівноймовірними, якщо ...
7. Статистична частота це ...



8. Теорема Бернуллі стверджує, що ...
9. Сумою двох подій  $A$  і  $B$  називається подія, яка полягає в тому, що ...
10. Випадкові події називають несумісними, якщо ...
11. Випадкові події називають сумісними, якщо ...
12. Число  $P_n$  усіх переставлянь із  $n$  елементів без повторень обчислюється за формулою ...
13. Число  $\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$  усіх переставлянь із  $n$  елементів з повторенням обчислюється за формулою ...
14. Число  $A_n^m$  усіх розміщень із  $n$  елементів по  $m$  елементів без повторень обчислюється за формулою ...
15. Число  $\bar{A}_n^m$  усіх розміщень із  $n$  елементів по  $m$  елементів з повтореннями обчислюється за формулою ...
16. Число  $C_n^m$  усіх комбінацій із  $n$  елементів по  $m$  елементів без повторень обчислюється за формулою ...
17. Імовірність вірогідної події дорівнює ..., а ймовірність неможливої події дорівнює ...
18. Теорема додавання несумісних подій стверджує, що ...
19. Якщо події  $A$  та  $B$  – сумісні, то ймовірність їхньої суми обчислюється за формулою ...
20. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює ...
21. Для повної групи подій справедливе рівняння ...
22. Принцип практично неможливих малоїмовірних подій полягає у ...
23. Дві події називаються незалежними, якщо ...
24. Добутком двох сумісних подій  $A$  та  $B$  називається ...
25. Імовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює ...
26. Умовною ймовірністю  $P_A(B)$  називається ...
27. Імовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює ...
28. Імовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює ...
29. Формулу повної ймовірності можна записати як ...
30. Гіпотезами називають ...
31. Формулу Баєса можна записати як ...
32. Серія з  $n$  випробувань (експериментів) підпорядкована схемі Бернуллі, якщо ...
33. Формулу Бернуллі можна записати як ...
34. Найімовірнішим числом появи події називають ...
35. Нерівність для знаходження нижньої межі для числа  $k_{\max}$  має вигляд ...

36. Нерівність для знаходження верхньої межі для числа  $k_{\max}$  має вигляд ...

37. Чи може значення  $k_{\max}$  бути не цілим числом?

38. За яких умов можна отримати два значення найімовірнішого числа появи події?

## Задачі для самостійного розв'язку

1. Якщо монету підкинули 100 разів і 53 рази випав герб, то яка статистична частота появи герба? Чому дорівнює ймовірність випадіння герба? У чому різниця між статистичною частотою і ймовірністю?

2. У коробці лежить 5 білих і 6 чорних куль. З коробки виймають навмання одну кулю. Знайти ймовірність того, що витягнули білу кулю.

3. У коробці лежить 5 білих і 6 чорних куль. З коробки виймають одну кулю та відкладають її в бік. Вийнята куля була білою. Після цього з коробки беруть ще одну кулю. Знайти ймовірність того, що друга вийнята куля теж біла.

4. У коробці лежить 4 білих і 6 чорних куль. З коробки виймають відразу дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі, що вийняли з коробки, були білими.

5. У коробці лежать 7 білих і 5 чорних куль. З коробки виймають відразу 5 куль. Знайти ймовірність того, що дві з них будуть білими, а три – чорними.

6. Взяли 10 перших літер англійської абетки. Скільки умовних слів із трьох літер можна скласти?

7. Взяли 10 перших літер англійської абетки. Яка ймовірність того, що будь-яке слово з трьох літер матиме літеру "b"?

8. З партії, що складається з 10 виробів, серед яких "3" браковані, виймають три вироби для перевірки. Знайти ймовірність таких подій:

$A = \{ \text{у виборці міститься один бракований виріб} \};$

$B = \{ \text{у виборці міститься хоча б один бракований виріб} \};$

$C = \{ \text{у виборці відсутні браковані вироби} \};$

$D = \{ \text{у виборці містяться два браковані вироби} \};$

$E = \{ \text{у виборці містяться всі браковані вироби} \}.$

9. Серед кандидатів у студентську раду факультету 3 першокурсники, 5 другокурсників, 7 третьокурсників. З цього складу вибирають 5 студентів. Знайти ймовірність таких подій:

$A = \{ \text{будуть вибрані першокурсники} \};$

$B = \{ \text{будуть вибрані третьокурсники} \};$

$C = \{\text{буде вибрано такий склад: 1 першокурсник; 2 другокурсники; 2 третьокурсники}\}$ .

10. Із п'яти літер абетки складено слово "КНИГА". Малюк, який не вміє читати, розсилав усі літери, а потім знову склав їх будь-як. Знайти ймовірність того, що в малюка знову вийде слово "КНИГА".

11. Малюк розкидав слово "АНАНАС". Знайти ймовірність того, що в малюка знову вийде слово "АНАНАС".

12. З повної колоди карт (52 карти, 4 масті) витягають декілька карт. Скільки карт необхідно витягнути для того, щоб з ймовірністю більшою за 0,5 стверджувати, що серед них будуть хоча б дві карти однакової масті?

13. У розіграші першості з баскетболу беруть участь 18 команд, із яких випадково формують дві групи по дев'ять команд у кожній. Серед учасників змагає п'ять команд екстракласу. Знайти ймовірність таких подій:

$A = \{\text{всі команди екстракласу опинились в одній групі}\}$ ;

$B = \{\text{дві команди екстракласу опинились в одній групі, а три – в іншій}\}$ .

14. Дехто купив карточку грошової лотереї і відмітив шість номерів із 49. Після цього відбувся розіграш тиражу 6 із 49. Знайти ймовірність таких подій:

$A_3 = \{\text{правильно відгадано 3 номери з 6}\}$ ;

$A_4 = \{\text{правильно відгадано 4 номери з 6}\}$ ;

$A_5 = \{\text{правильно відгадано 5 номери з 6}\}$ ;

$A_6 = \{\text{правильно відгадано 6 номери з 6}\}$ .

15. Десять осіб розташувалися за круглим столом. Знайти ймовірність того, що дві фіксовані особи  $A$  і  $B$  опиняться поряд.

16. Дослід складається з чотирикратного вибору з поверненням однієї літери абетки (будь-якої):  $A = \{a, v, k, o, m\}$  і викладені слова в порядку появи літер. Яка ймовірність того, що в підсумку буде написано слово "МАМА"?

17. У комп'ютерному класі працюють чотири комп'ютери. Для кожного комп'ютера ймовірність того, що він працює в робочий час, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що натепер (робочі години) працює хоча б один комп'ютер.

18. Для сигналізації про аварію встановлені дві незалежні системи. Ймовірність того, що про аварію сповістить перша система 0,95, а друга – 0,9. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює хоча б одна сигналізація.

19. Підкидають дві гральні кістки, грані яких мають числа 1, 2, 3, 4 (трикутні піраміди). Знайти ймовірність того, що номер "4" з'явиться хоча б на одній грані (ця грань розташовується на дошці).

20. На полиці стоїть 15 книжок, 5 з них з хімії. Бібліотекар бере навмання три книги. Знайти ймовірність того, що хоча б одна книга буде з хімії.

21. У коробці лежать 10 деталей, із яких чотири кольорові. Робочий навмання взяв три деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна деталь буде кольоровою.

22. У коробці міститься шість однакових занумерованих кубиків. Навмання по одному виймають усі кубики. Знайти ймовірність того, що номери кубиків, що виймають, з'являться у зростаючому порядку.

23. У штативі 20 пробірок, які мають номери від 101, 102 ... до 120, розставлені в довільному порядку. Студент навмання виймає дві пробірки. Знайти ймовірність, що студент візьме пробірки з номерами 101 і 120.

24. Імовірність того, що витрати електроенергії протягом однієї доби не перевищать встановленої норми, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що у прийдеши шість днів витрати електроенергії впродовж чотирьох днів не перевищать норми.

25. Статистично встановлено, що з кожної тисячі народжених немовлят у середньому 485 дівчат і 515 хлопчиків. У родині п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) три дівчинки; б) не більше трьох дівчат; в) не менше двох, але не більше чотирьох дівчат.

26. Знайти найімовірніше число появи події  $A$  в 10 дослідах, якщо ймовірність появи  $A$  в кожному досліді  $p = 2/3$ .

27. Знайти найімовірніше число появи події  $A$  в п'яти дослідах, якщо ймовірність появи  $A$  в кожному досліді  $p = 2/3$ .

28. Проводиться 19 пострілів із гвинтівки. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі 0,8. Знайти найімовірнішу кількість влучань у ціль.

29. Чому дорівнює ймовірність появи події  $A$  в кожному досліді, якщо найімовірніше число появи  $A$  у 100 незалежних дослідах дорівнює 20?

30. Перший прилад складається з  $n_1$  вузлів, а другий – з  $n_2$  вузлів. Кожен прилад працював протягом  $t$  годин. За цей час кожен вузол першого приладу виходить з ладу незалежно один від одного з ймовірністю  $p_1$ , другого – з  $p_2$ . Знайти ймовірність  $P$  того, що за  $t$  годин у першому приладі вийде з ладу  $m_1$  вузлів, а в другому –  $m_2$ .

31. За кожного циклу огляду радіолокаційною станцією, яка стежить за космічними об'єктами, об'єкт виявляється з ймовірністю  $p$ . Виявлення об'єкту в кожному циклі відбувається незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що при  $n$  циклах об'єкт буде виявлено.

32. Маємо  $m$  радіолокаційних станцій, кожна з яких за один цикл спостережень виявляє об'єкт з ймовірністю  $p$  (незалежно від інших

циклів і станцій). За час  $t$  кожна станція встигає зробити  $n$  циклів. Знайти ймовірність таких подій:

а)  $A = \{\text{об'єкт буде виявлено кожною станцією}\}$ ;

б)  $B = \{\text{об'єкт буде виявлено хоча б однією станцією}\}$ .

33. Маємо групу з  $k$  космічних об'єктів, кожен із яких незалежно від інших виявляється радіолокаційними станціями з ймовірністю  $p$ . За групою об'єктів спостерігають незалежно одна від одної  $m$  радіолокаційних станцій. Знайти ймовірність того, що не всі об'єкти, які входять у групу, будуть виявлені.

34. Ймовірність появи деякої випадкової події в першому випробуванні дорівнює 0,9, у другому – 0,8, а в третьому – 0,7. Яка ймовірність того, що під час трьох випробувань подія з'явиться а) лише один раз; б) тільки два рази; в) хоча б один раз; г) жодного разу?

35. Ймовірність того, що студент складе іспит зі статистичних методів є величиною сталою й дорівнює в середньому 0,8. Знайти найімовірнішу кількість студентів, які складуть іспит із цього предмету з групи із 8 студентів і обчислити відповідну ймовірність.

36. Набір трицифрового номера білета, який виграє, виконується триразовим автоматичним викиданням із ящика одного за одним трьох жетонів із загальної кількості 9 жетонів, пронумерованих цифрами від 1 до 9. Знайти ймовірність того, що набраний номер не містить цифри 7.

37. Із партії, у якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі навмання беруть 3 деталі з поверненням для перевірки. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей а) усі три стандартні; б) не більше однієї нестандартної; в) хоча б одна нестандартна.

38. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 від загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них становило 40?

39. Телефонна книга розкривається навмання і вибирається випадковий номер телефону. Вважаючи, що телефонний номер складається з 7 цифр, знайти ймовірність того, що всі цифри різні.

40. У магазині три холодильники, у яких закінчується морозиво. У першому – 4 білих морозива і 6 шоколадних, у другому – 2 білих і 8 шоколадних, у третьому – 3 білих і 7 шоколадних. Навмання вибирають холодильник і виймають із нього морозиво, визначити ймовірність того, що воно біле.

## Відповіді до задач розділу 1

- 1.**  $p^* = 0,53$ ;  $p = 0,5$ . **2.**  $p = 0,45$ . **3.**  $p = 0,4$ . **4.**  $p = 0,133(3)$ . **5.**  $p = 0,265$ .  
**6.**  $C_{10}^3 = 120$ ;  $A_{10}^3 = 720$ . **7.**  $p_1 = 0,3$ ;  $p_2 = 0,1$ . **8.**  $p_1 = 0,525$ ;  $p_2 = 0,708$ ;  
 $p_3 = 0,292$ ;  $p_4 = 0,175$ ;  $p_5 = 0,0083$ . **9.**  $p_1 = 0,022$ ;  $p_2 = 0,007$ ;  $p_3 = 0,21$ .  
**10.**  $p = 0,0083$ . **11.**  $p = 0,017$ . **12.** 3 або більше карт. **13.**  $p(A) = 0,0294$ ;  
 $P(B) = 0,7059$ . **14.**  $p(A_3) = 1,76 \cdot 10^{-2}$ ;  $p(A_4) = 9,7 \cdot 10^{-4}$ ;  $p(A_5) = 1,8 \cdot 10^{-5}$ ;  
 $p(A_6) = 7,1 \cdot 10^{-8}$ . **15.**  $p = 0,22$ . **16.**  $p = 1,6 \cdot 10^{-3}$ . **17.**  $p = 0,9999$ . **18.**  $p = 0,995$ .  
**19.**  $p = 0,437$ . **20.**  $p = 0,736$ . **21.**  $p = 0,83$ . **22.**  $p = 1,4 \cdot 10^{-3}$ . **23.**  $p = 5,3 \cdot 10^{-3}$ .  
**24.**  $p = 0,296$ . **25.**  $p(a) = 0,302$ ;  $p(\bar{a}) = 0,831$ ;  $p(\bar{e}) = 0,766$ . **26.**  $k_{max} = 7$ .  
**27.**  $k_{max} = 3$ ; 4. **28.**  $k_{max} = 15$ ; 16. **29.**  $p = 0,2$ .  
**30.**  $P = C_{n_1}^{m_1} p_1^{m_1} (1-p_1)^{n_1-m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} p_2^{m_2} (1-p_2)^{n_2-m_2}$ . **31.**  $P = 1 - (1-p)^n$ .  
**32.**  $p(A) = [1 - (1-p)^n]^m$ ;  $p(B) = 1 - [(1-p)^n]^m$ .  
**33.**  $p(A) = 1 - [1 - (1-p)^m]^k$ . **34.**  $p(a) = 0,092$ ;  $p(\bar{a}) = 0,398$ ;  $p(\bar{e}) = 0,994$ ;  
 $p(\bar{z}) = 0,006$ . **35.**  $k_{max} = 7$ ;  $P_8(7) = 0,336$ . **36.**  $p = 0,67$ . **37.**  $p(a) = 0,42$ ;  
 $p(\bar{b}) = 0,844$ ;  $p(\bar{e}) = 0,58$ . **38.**  $n = 66$ ; 67. **39.**  $p = 0,06$ . **40.**  $p = 0,33$ .

## РОЗДІЛ 2

### Випадкова величина та її властивості

#### 2.1. Визначення випадкової величини. Біноміальний закон розподілення

У першому розділі йшлося про події та ймовірності подій. Ці поняття можна розвинути, застосувавши їх до кількісних ознак, пов'язаних із випадковими (стохастичними) експериментами. Оскільки результат експерименту може змінюватися від випадку до випадку, то кількісна ознака цього експерименту є змінною величиною, до того ж випадковою. Отже, *випадковою* називають величину, яка внаслідок експерименту з випадковим результатом набуває лише одне з можливих, наперед невідомих значень і залежить від випадкових причин, які заздалегідь не можуть враховуватися.

Прикладом випадкових величин, що набувають різних чисельних значень під впливом багатьох випадкових факторів, можуть бути:

- а) кількість очок, яке випаде на верхній грані за одне кидання грального кубика;
- б) кількість бракованих виробів серед  $n$  навмання вибраних;
- в) кількість кидань монети до першої появи герба;
- г) кількість викликів, які надходять на телефонну станцію протягом деякого проміжку часу;
- д) час виконання деякого завдання тощо.

Далі позначатимемо випадкові величини літерами:  $X, Y, \dots; x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$ .

У наведених прикладах траплялися два типи випадкових величин: *дискретні величини*, множини випадкових значень яких скінченні або нескінченні (приклади (а)-(з)), і *неперервні величини*, множини можливих значень яких суцільно заповнюють деякий інтервал (приклад (д)).

*Дискретною* називають випадкову величину, яка може набувати окремих, ізольованих значень із визначеною ймовірністю.

Дискретна випадкова величина внаслідок дослідів може отримати будь-яке зі своїх значень, але хоча б одне з них матиме

обов'язково. Тому сукупність усіх значень дискретної випадкової величини складають повну групу подій. Наприклад, кількість очок на кубіку – це випадкова дискретна величина, яка може набувати значення:  $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4, X_5 = 5, X_6 = 6$ . Ці події рівноймовірні й мають  $p_i = 1/6$ . Під час кидання кубіка завжди з'являється одне з цих чисел, тому ці події складають повну групу.

Для повної групи подій справедливе рівняння (1.13), яке можна записати в такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (2.1)$$

Для дискретної випадкової величини рівняння (2.1) називається **умовою нормування випадкової величини**. Це означає, що якими б не були ймовірності окремих значень цієї дискретної випадкової величини їхня сума завжди дорівнює одиниці.

**Законом розподілення** дискретної випадкової величини називається перелік усіх можливих її значень і відповідних цим значенням імовірностей.

Закону розподілення дискретної випадкової величини можна надати наочності у вигляді *таблиці*, перша графа якої містить усі можливі значення випадкової величини, а друга – відповідні значення ймовірності. Крім табличного варіанту закон розподілення дискретної випадкової величини можна також задати в *аналітичному* вигляді. Наприклад, якщо дискретною випадковою величиною є число  $k$  появи події у  $n$  дослідах, то для визначення ймовірності можна використати відому вже формулу Бернуллі (1.24).

Цей закон розподілення (числа появи події у  $n$  дослідах) можна представити і у вигляді табл. 2.1, де навпроти кожного можливого значення випадкової величини ( $k$ ) імовірність розраховуватиметься за формулою Бернуллі:  $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ .

**Таблиця 2.1**

$k$	$n$	$n-1$	...	$k$	...	0
$P(k)$	$p^n$	$n \cdot p^{n-1} \cdot q$	...	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	...	$q^n$

Перевірка наведеного вище в таблиці закону розподілу випадкової величини на умову нормування (2.1) дає таке:



$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = C_n^n \cdot p^n + C_n^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \dots + C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \dots + C_n^0 \cdot q^n =$$

$$= p^n + n \cdot p^{n-1} q + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \dots + q^n.$$

Праву частину цього рівняння можна розглядати як розклад бінома Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + b^n.$$

Якщо праві частини в обох вищенаведених рівняннях схожі, ліві частини теж мають бути схожими й можна записати, що

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \left( \underbrace{p+q}_1 \right)^n = 1.$$

Отже, доведено, що умова нормування для закону розподілу випадкової величини, що заданий табл. 2.1, виконується, а схожість рівнянь для ймовірностей, що розраховуються за формулою Бернуллі та бінома Ньютона дозволяє назвати наведений закон розподілення **біноміальним**. Отже, **біноміальним** будемо називати закон розподілення випадкової величини, для якої ймовірності появи події розраховуються за формулою Бернуллі.

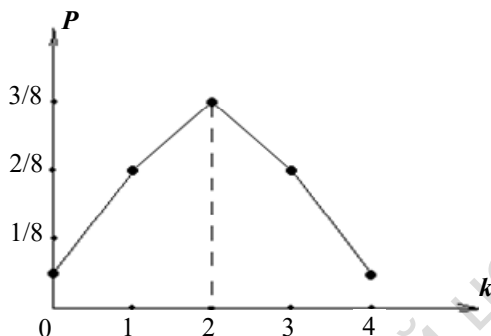
Нарешті закон розподілення дискретної випадкової величини можна задати *графічно*. У наступному прикладі показано всі види представлення закону розподілення дискретної випадкової величини.

*Приклад 2.1.* Чотири рази кидаємо монету. Знайти закон розподілення для числа появи решки.

*Розв'язок.* Ця задача є прикладом біноміального розподілення при  $n=4$ ,  $p=q=1/2$ . Розраховуємо ймовірності для кожного значення випадкової величини на формулою Бернуллі та вносимо до таблиці.

**Таблиця 2.2**

$k$	0	1	2	3	4
$P_n(k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$



**Рис. 2.1.** Графічне представлення закону розподілення дискретної випадкової величини

На рис. 2.1 це розподілення представлено графічно, утворюючи так званий *багатокутник розподілення*.

Біноміальне розподілення може застосовуватися у фізико-хімічних дослідженнях для знаходження оптимальної концентрації в гомогенних каталізаторах – сплавах за допомогою кластерної моделі. Д. Дауден застосував біноміальне розподілення для інтерпретації даних перебігу гетерогенно-каталітичних реакцій на гомогенних металічних сплавах-каталізаторах. За моделлю Даудена, сплав є статистичною сукупністю кластерів (ансамблів) різного складу. Якщо в бінарному сплаві ( $AB$ ) існують кластери з  $n$  атомів, що містять  $k$  атомів певного компоненту  $A$ , то ймовірність ( $P_n^k$ ) утворення таких кластерів задається біноміальним розподіленням:

$$P_n^k = C_n^k \cdot x_A^k \cdot (1 - x_A)^{n-k}, \quad (2.2)$$

де замість імовірності  $p$  формули (1.24) фігурує  $x_A$  – мольна частка компоненту  $A$  у сплаві, яка, подібно ймовірності, змінюється від нуля до одиниці.

Для різних гетерогенно-каталітичних реакцій величина  $k$  може бути різною, виходячи зі структури самого каталізатора й детального механізму каталітичної реакції. За заданого значення  $k$  можна знайти  $x_{opt}$ , або ж можна розв'язувати обернену задачу – за експериментальним значенням  $x_{opt}$  знайти оптимальний склад кластера.

З умови екстремуму функції визначаємо  $x_{omn}$  :

$$\frac{dP_n^k}{dx} = 0.$$

Підставляючи у вираз для похідної рівняння (2.2), отримуємо:

$$\frac{dP_n^k}{dx} = C_n^k \left[ k \cdot x_{omn}^{k-1} \cdot (1 - x_{omn})^{n-k} + (n-k) \cdot (1 - x_{omn})^{n-k-1} \cdot (-1) \cdot x_{omn}^k \right] = 0.$$

Виконавши нескладні математичні перетворення, отримуємо:

$$x_{omn} = \frac{k}{n}. \quad (2.3)$$

Під час гетерогенно-каталітичного окиснення монооксиду карбону молекулярним киснем адсорбція CO на каталізаторі може відбуватися в різних формах: лінійна й місткова, причому багатоцентрова, "місткова" форма хемосорбції CO є міцною та хемосорбовані в такій формі молекули CO блокують поверхню каталізатора, гальмуючи процес окиснення CO. Така форма є характерною для каталізаторів – перехідних металів: Pd, Pt, Ni тощо. Якщо брати сплави цих металів із металом, що не хемосорбує CO, а хемосорбує лише кисень, наприклад, зі сріблом, то можна прийти до висновку, що оптимальними повинні бути кластери, у яких окремий атом перехідного металу, зокрема паладію, розташовується в оточенні атомів срібла. Це виключає міцну багатоцентрову хемосорбцію карбон монооксиду, бо CO на цих кластерах може хемосорбуватися лише у слабкій одноточковій (лінійній) формі, що сприяє каталізу. Отже,  $k = 1$ , і, знаходячи  $n = 9-10$  зі структурних кристалохімічних даних, маємо згідно з формулою (2.4):

$$x_{omn} = \frac{k}{n} = 0,1 \sim 0,11.$$

Експериментальні дослідження виявили, що найбільш активні паладій-срібні каталізатори окиснення CO містять від 5 до 15 % Pd, що добре узгоджується з теоретичними передбаченнями.

Для реакції синтезу амоніаку потрібні багатоатомні кластери.

За умови рівності  $k = n$ , тобто, якщо максимальну активність мають кластери, що складаються з атомів лише одного сорту, активність сплаву (позначимо її  $a$ ) пропорційна:

$$P_n = x_A^n = \frac{a}{a_0}, \quad (2.4)$$

де  $a_0$  – активність чистого компоненту  $A$ .

Побудувавши залежність у координатах  $\lg \frac{a}{a_0} \sim f(\lg x_A)$ , можна

знайти  $n$  – число атомів у кластері. Подібна ситуація реалізується, наприклад, за умови проведення реакції синтезу амоніаку на Fe-Ni сплавах, де нікель є інертним у каталізі компонентом. Оцінка величини  $n$  за експериментальними даними з каталітичної активності Fe-Ni сплавів в області гомогенності дала, у середньому, значення  $n \cong 6-7$  атомів. Це показує, що активним центром у реакції синтезу амоніаку є група атомів у поверхневому шарі каталізатора.

Якщо у якійсь реакції переважно працюють кластери певного складу, що мають  $k$  атомів компонента  $A$ , то каталітична активність пропорційна  $P_n^k$  і на кривій залежності активності від складу сплаву з'являється максимум, положення якого на осі абсцис визначається співвідношенням (2.3) і  $x_{opt} = \frac{k}{n}$ .

Для Fe-Co сплавів-каталізаторів на залежності активності в реакції синтезу аміаку від складу (рис. 2.2) є яскраво виражений максимум за 14 % Co, отже  $x_A^{max} = 0,14$ .

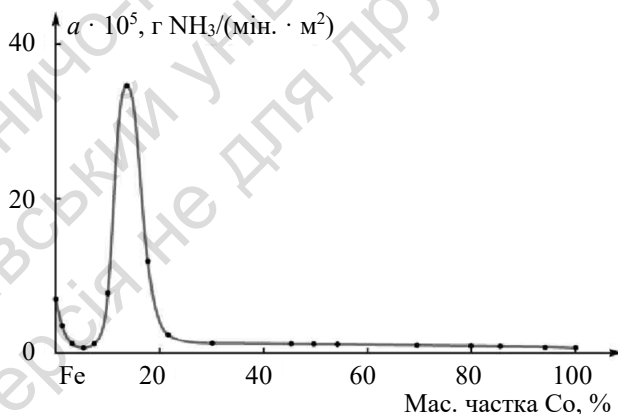


Рис. 2.2. Залежність каталітичної активності Fe-Co сплавів від їхнього складу в реакції синтезу аміаку

При  $n = 7$  це відповідає одному атому кобальту на 6 атомів заліза, тобто оптимальними є кластери складу  $Fe_6Co$ . З'ясувалося, що саме такі кластери мають оптимальні електронні та хемосорбційні характеристики для найкращого перебігу реакції синтезу аміаку.

## 2.2. Закон розподілення Пуассона

Якщо в наведеному вище біноміальному законі ймовірність події має дуже мале значення ( $p \leq 0,1$ ), то в цих випадках біноміальне розподілення перетворюється на **розподілення Пуассона**.

Зробимо припущення, що добуток  $n \cdot p$  зберігає стале значення, тобто  $n \cdot p = \nu = const$ , де  $\nu$  – деяка стала (далі буде показано, що це припущення означає, що середнє число появи події  $A$  в різних серіях дослідів (за різних значень  $n$ ) є сталою величиною).

Із формули Бернуллі маємо:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(k-1)]}{k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Оскільки  $n \cdot p = \nu = const$ , то  $p = \frac{\nu}{n}$ , отже:

$$P_n(k) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(k-1)]}{k!} \cdot \left(\frac{\nu}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{\nu^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k}.$$

Знайдемо тепер  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k)$ .

$$P_n(k) \approx \frac{v^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-k} \right] =$$

$$= \frac{v^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{v}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{-k}.$$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{v}{n}\right)^n = e^{-v}$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{-k} = 1$ , то отримуємо:

$$P_n(k) = \frac{v^k \cdot e^{-v}}{k!}. \quad (2.5)$$

Ця формула виражає **закон розподілення Пуассона**, який ще називають "законом рідкісних подій". Отже, якщо ймовірність появи події в одиничному досліді мала ( $p \leq 0,1$ ), то під час складання закону розподілення випадкової величини у процесі знаходження  $P_n(k)$  користуємось формулою Пуассона (2.5).

Розподіл Пуассона записують у формі таблиці (табл. 2.3).

**Таблиця 2.3**

$X = k$	0	1	2	...	$n-1$	$n$
$P_n(k)$	$e^{-v}$	$\frac{v}{1!} \cdot e^{-v}$	$\frac{v^2}{2!} \cdot e^{-v}$	...	$\frac{v^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-v}$	$\frac{v^n}{n!} \cdot e^{-v}$

Оскільки для будь-якого закону має виконуватись умова нормування, то перевіримо її для розподілення Пуассона.

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n \frac{v^k \cdot e^{-v}}{k!} = e^{-v} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{v^k}{k!} =$$

$$= e^{-v} \left[ 1 + v + \frac{v^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \dots \right] = e^{-v} \cdot e^v = 1.$$

Вираз у квадратних дужках є нічим іншим, як розклад у ряд Маклорена функції  $e^v$ . Отже, умова нормування для розподілення Пуассона виконується.

Розподілення Пуассона, зокрема використовувалося в гетерогенному каталізі під час тлумачення активності нанесених каталізаторів за дуже малої концентрації каталітично активного металу,

нанесеного на носій-адсорбент. У цьому випадку на поверхні носіїв містяться вже не мікрочастинки, а дуже невеличкі групи атомів, які М. І. Кобозев запропонував називати *ансамблями*. Він звернув увагу на те, що зі збільшенням кількості нанесеного металу на носії за дуже малих концентрацій активність ( $A$ ) нанесеного каталізатора проходить через максимум, як це зображено на рис. 2.3.

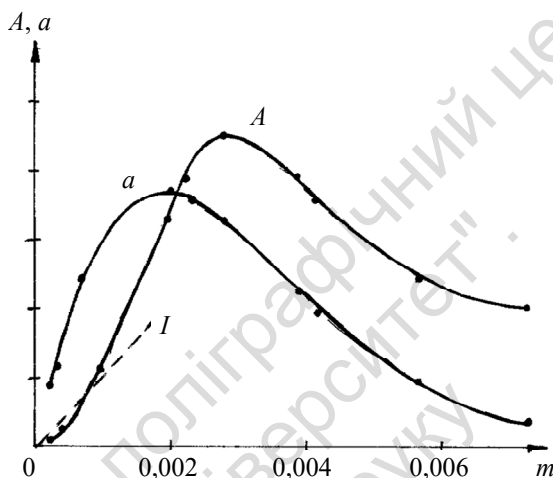


Рис. 2.3. Залежність активності ( $A$ ) і питомої активності ( $a$ ) нанесеного каталізатора від маси ( $m$ ) нанесеного металу

Якби каталітична реакція була індиферентною до виду активних центрів-ансамблів, то активність нанесеного каталізатора була б пропорційною кількості каталітично активної маси (цей випадок описує пряма  $I$  на рис. 2.3). Наявність максимуму свідчить про те, що носіями каталітичної активності є ансамблі певного розміру, які складаються з певної кількості атомів –  $k$ .

Запропонована М. І. Кобозевим *теорія ансамблів* дає можливість обчислити величину  $k$  з експериментальних даних. Вважається, що на поверхні носія є певні комірки – ділянки міграції, у кожній з яких є певна кількість атомів  $k$ , що складають  $k$ -атомний ансамбль. Між комірками існують бар'єри, що не дозволяють атомам переходити з однієї ділянки міграції до іншої. Розподілення атомів активного металу по комірках визначається законами

статистики. Оскільки концентрація нанесеного металу є дуже малою, то можна застосувати закон рідкісних подій – розподілення Пуассона. Згідно з цим розподіленням імовірність ( $p_k$ ) утворення  $k$ -атомного ансамблю дорівнює:

$$p_k = \frac{v^k}{k!} e^{-v},$$

де  $v$  – середня кількість атомів у комірни.

Величина  $v$  пов'язана з масою  $m$  нанесеного металу простим співвідношенням:

$$m = v \cdot N \cdot g_a = \text{const} \cdot v, \quad (2.6)$$

де  $N$  – кількість комірок на поверхні носія,  $g_a$  – маса атома металу.

Активність  $A$  каталізатора, що містить ансамблі з  $k$  атомів, дорівнює:

$$A = r_k \cdot p_k, \quad (2.7)$$

де  $r_k$  – активність ансамблю.

Положення максимуму на кривій залежності  $A$  від  $m$  (рис. 2.3)

визначається умовою екстремуму функції  $\frac{dA}{dm} = 0$ .

Оскільки  $m$  є пропорційною  $v$ , а  $A$  – пропорційна  $p_k$ , то умова екстремуму переходить у  $\frac{dp_k}{dv} = 0$ .

Відповідно до цієї умови з рівняння (2.5) маємо:

$$v_A^{\max} = k. \quad (2.8)$$

Проте із графіка залежності  $A$  від  $m$  (рис. 2.3) маємо не  $v_A^{\max}$ , а лише пропорційну їй величину  $m_A^{\max}$ . Додатково можна використати положення максимуму залежності питомої активності  $a$  від маси нанесеного металу, що визначається відношенням  $A$  до  $m$ . Отже, маємо:

$$a = \frac{A}{m} = \frac{r_k \cdot p_k}{v \cdot N \cdot m_A} = \text{const} \cdot \frac{v^{k-1}}{k!} \cdot e^{-v}, \quad (2.9)$$

і з умов  $\frac{da}{dm} = 0$  і, відповідно,  $\frac{da}{dv} = 0$  знаходимо:

$$v_a^{\max} = k - 1. \quad (2.10)$$



Із рівностей (2.6), (2.8) і (2.10) знаходимо:

$$k = \frac{v_A^{\max}}{v_A^{\max} - v_a^{\max}} = \frac{m_A^{\max}}{m_A^{\max} - m_a^{\max}}. \quad (2.11)$$

Дослідження активності нанесених катализаторів у реакціях різного типу показало, що реакції гідрування – дегідрування перебігають на двоатомних ансамблях, у реакціях окиснення типове значення  $k = 1$  (зазначимо, що при цьому  $m_a^{\max} = 0$ , тобто, на залежності  $a \sim f(m)$  максимум збігається з віссю ординат). Отже, через застосування розподілення Пуассона теорія ансамблів дозволяє визначити кількість атомів, що складають активний центр.

## 2.3. Геометричний розподіл

Нехай знову проводяться  $n$  випробувань за схемою Бернуллі та ймовірність появи події  $A$  в кожному випробуванні становить  $p$ , а  $q = 1 - p$ . Експеримент зупиняється, як тільки з'явиться подія  $A$ . Це означає, що коли подія  $A$  з'явилася в  $k$ -му випробуванні, то в попередніх  $(k-1)$  випробуваннях вона не з'явилася.

Вважатимемо, що дискретна випадкова величина  $X$  є число випробувань, які необхідно провести до першої появи події  $A$ . Можливими значеннями випадкової величини  $X$  є  $x_1 = 1; x_2 = 2, \dots$ . Оскільки  $q^{k-1}$  представляє собою ймовірність того, що подія в  $(k-1)$  випробуваннях не з'явиться, а  $p$  – ймовірність появи події в  $k$ -му випробуванні, то

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p. \quad (2.12)$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$ , що виражається формулою (2.12), називається **геометричним**, бо права частина цієї формули – загальний член геометричної прогресії:

$$p + p \cdot q + p \cdot q^2 + \dots + p \cdot q^{k-1} + \dots = p \cdot \frac{1}{1 - q} = 1,$$

що підтверджує виконання умови нормування для геометричного розподілу.

Геометричний закон розподілу дискретної випадкової величини записується у формі таблиці:

$X = x_i$	1	2	3	...	k	...
$P = p_i$	$p$	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	...	$p \cdot q^{k-1}$	...

## 2.4. Неперервна випадкова величини

Вище розглядалися дискретні випадкові величини й закони їхнього розподілення. Випадкова величина може змінюватись неперервно. Наприклад, кут, що утворюється між рухомою і нерухою стрілками при грі в рулетку.

**Неперервною** називають випадкову величину, якщо її можливі значення суцільно заповнюють деякий кінцевий чи нескінчений проміжок. Число можливих значень неперервної випадкової величини є нескінченим. Скласти таблицю, у якій перераховувалися б всі можливі значення такої випадкової величини, неможливо. Справді, якщо випадкова величина  $X$  має значення, що суцільно заповнюють інтервал  $(a, b)$ , то записати її закон розподілу у вигляді переліку можливих значень і відповідних їм імовірностей неможливо хоча б з тієї причини, що в цьому випадку неможливо скласти перелік її значень. Для характеристики неперервної випадкової величини ( $X$ ) замість імовірностей користуються деякою функцією від  $x$ , яка називається **густиною розподілу (щільністю)** випадкової величини та позначається  $f(x)$ . За визначенням **густиною (щільністю) розподілу** ймовірностей неперервної випадкової величини  $X$  називають  $f(x)$ , яку називають ще **диференційною функцією розподілу**, дорівнює першій похідній від функції розподілу  $F(x)$ .

Отже є дві функції: одна інтегральна  $F(x)$ , інша диференційна  $f(x)$ , за допомогою яких можна описати неперервну випадкову величину. Коротко розглянемо ці функції та їхні основні властивості.

### 2.4.1. Функція розподілу ймовірностей

Функцією розподілу ймовірностей  $F(x)$  випадкової величини  $X$  називається ймовірність того, що внаслідок випробування вона набуде значення, меншого за число  $x$ , тобто

$$F(x) = P(X < x) \quad (2.13)$$

Геометрично рівність (2.13) можна трактувати так:  $F(x)$  є ймовірність того, що випадкова величина  $X$  набуде значень, які зображаються на числовій прямій точками, що лежать ліворуч від  $x$ .

**Властивості функції розподілу:**

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$ .

Це випливає з того, що  $F(x)$  є ймовірність події  $P(X < x)$  і її значення належать проміжку  $[0;1]$ .

2. Якщо  $x_1 < x_2$ , то  $F(x_1) \leq F(x_2)$ , тобто  $F(x)$  – неспадна функція.

3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ , тобто функція  $F(x)$  – неперервна зліва.

4. Якщо можливі значення випадкової величини  $X$  належать інтервалу  $(a; b)$ , то  $F(x) = 0$  при  $x \leq a$  і  $F(x) = 1$  при  $x \geq b$ .

Справді, якщо  $x \leq a$ , то подія  $X < x$  є неможлива, величина  $X$  не набуває значень, які менші за  $x$ , і тому  $F(x) = 0$ .

Якщо  $x \geq b$ , то подія  $X < x$  є вірогідною, оскільки всі можливі значення  $X$  будуть меншими за  $x$ , і тому  $F(x) = 1$ .

5. Ймовірність того, що випадкова величина  $X$  набуде значення із проміжку  $[a; b)$ , дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (2.14)$$

6. Якщо випадкова величина  $X$  неперервна, то ймовірність того, що вона набуде будь-якого окремого значення, дорівнює нулю.

7. Якщо випадкова величина  $X$  неперервна, то для будь-яких дійсних чисел  $a$  і  $b$ ,  $a \leq b$  правильні нерівності:

$$\begin{aligned}
 P(a \leq X \leq b) &= P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = \\
 &= P(a < X < b) = F(b) - F(a).
 \end{aligned}$$

Наведені властивості функції розподілу неперервної випадкової величини дозволяють описати її графічне зображення (рис. 2.4).

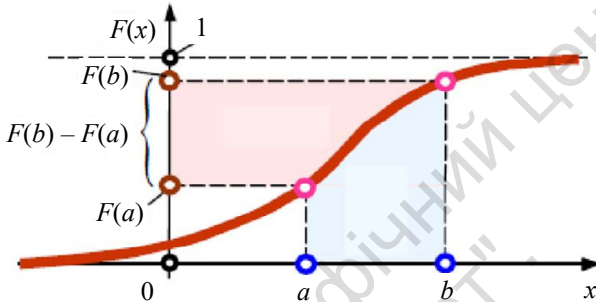


Рис. 2.4. Графік функції розподілу неперервної випадкової величини

Зверніть увагу, що на рис. 2.4. наведена ілюстрація властивості (5), а саме – знаходження ймовірності потрапляння випадкової величини у проміжок  $[a; b)$ , сама ж функція розподілу визначена на значно більшому проміжку.

### 2.4.2. Густина (щільність) розподілу ймовірностей

Поряд із функцією розподілу ймовірностей неперервну випадкову величину можна задавати ще й густиною (щільністю) розподілу ймовірностей.

Як уже зазначалось, *густиною (щільністю) розподілу* ймовірностей будемо називати деяку функцію  $f(x)$ , яка дорівнює першій похідній функції  $F(x)$ , тобто:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2.15)$$

Із наведеного означення випливає, що функція розподілу  $F(x)$  є первісною для густини розподілу  $f(x)$ .

**Властивості густини розподілу:**

1. Густина розподілу – невід’ємна функція:  $f(x) \geq 0$ .

Ця властивість впливає з однієї із властивостей функції розподілу:  $F(x)$  є неспадною.

2. Імовірність того, що неперервна випадкова величина  $X$  набуде значення з інтервалу  $(a; b)$ , дорівнює визначеному інтегралу від густини її розподілу в межах від  $a$  до  $b$ , тобто

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.16)$$

3. Невласний інтеграл від густини розподілу випадкової величини в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$  дорівнює 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (2.17)$$

Ця властивість густини розподілу є умовою нормування для неперервної випадкової величини. У виконанні цієї властивості легко переконатись такими обчисленнями:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

Зокрема, якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини містяться в інтервалі  $(a; b)$ , то:  $\int_a^b f(x) dx = 1$ .

4. Функція розподілу неперервної випадкової величини дорівнює інтегралу від густини розподілу на проміжку  $(-\infty; x]$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (2.18)$$

За допомогою сформульованих властивостей можна описати графік густини розподілу.

На рис. 2.5 зображено графік густини розподілу випадкової величини  $X$ , яка визначена на проміжку від  $-\infty$  до  $+\infty$ . За допомогою графіка можна дати геометричне тлумачення сформульованих властивостей. За рівнянням (2.17) площа фігури, що обмежена віссю  $Ox$  і графіком густини розподілу, дорівнює одиниці. А рівність (2.16) означає, що ймовірність потрапляння

значень випадкової величини  $X$  в інтервал  $(a;b)$  дорівнює площі зафарбованої фігури, яка знизу обмежена віссю  $Ox$ , зверху – густиною розподілу, а по бокам – перпендикулярами, опущеними в точки  $a$  і  $b$ .

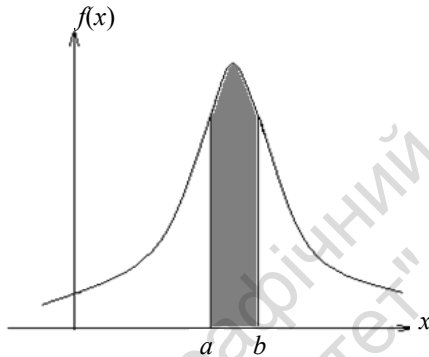


Рис. 2.5. Графік густини розподілу

### 2.4.3. Рівномірний закон розподілу

Одним із найпростіших прикладів закону розподілу випадкової величини є **рівномірний**. Рівномірний закон розподілу можна застосувати як до дискретних випадкових величин, так і до неперервних. Прикладом рівномірного закону розподілу для дискретних випадкових величин може бути шестигранний кубик: кожному значенню випадкової величини (число випадінь очок на грані) ставиться у відповідність імовірність появи події, яка для нашого прикладу рівномірних подій складає  $1/6$ .

Розглянемо як виглядає рівномірний розподіл для неперервних випадкових величин. У випадку неперервних випадкових величин закон розподілу їхніх ймовірностей описують за допомогою густини (щільності) розподілу  $f(x)$ . Тому цей закон ще називають **законом рівномірної густини**.

Неперервна випадкова величина називається **рівномірно розподіленою** на проміжку  $[a;b]$ , якщо її густина  $f(x)$  на цьому проміжку є сталою, а поза ним дорівнює нулю, тобто:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \dots \dots \dots x \leq a; \\ C = \text{const}, \dots a < x \leq b; \\ 0, \dots \dots \dots x > b. \end{cases}$$

Оскільки за властивістю густини розподілу  $\int_a^b f(x) dx = 1$ , то стала  $C$  не може бути довільною та визначається з рівності:

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_a^b C dx = 1 \Rightarrow C(b-a) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{b-a}.$$

Отже, рівномірний розподіл імовірностей неперервної випадкової величини, можливі значення якої зосереджені на проміжку  $[a; b]$ , описується густиною:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \dots \dots \dots x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, \dots \dots \dots a < x \leq b; \\ 0, \dots \dots \dots x > b. \end{cases} \quad (2.19)$$

Відповідна функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \dots \dots \dots x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, \dots \dots \dots a < x \leq b; \\ 1, \dots \dots \dots x > b. \end{cases} \quad (2.20)$$

Графічна ілюстрація рівномірного розподілу наведена на рис. 2.6.

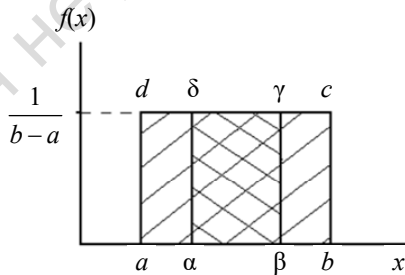


Рис. 2.6. Графік густини рівномірного розподілу

Ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок  $\alpha < x < \beta$  дорівнює:

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{b-a} \int_{\alpha}^{\beta} dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a}. \quad (2.21)$$

Ця ймовірність, як це бачимо з рис. 2.5, дорівнює площині прямокутника " $\alpha\beta\gamma\delta$ ".

*Приклад 2.2.* Потяги метро рухаються з інтервалом у 2 хв. Знайти ймовірність очікування потяга протягом 15 с.

*Розв'язок.* У цьому випадку  $b - a = 120$  с,  $\beta - \alpha = 15$  с. Отже,

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{15}{120} = 0,125.$$

*Приклад 2.3.* Знайти ймовірність потрапляння в сектор від 0 до  $90^\circ$  під час гри в рулетку.

*Розв'язок.* У цьому випадку  $b - a = 360^\circ$ ,  $\beta - \alpha = 90^\circ$ . Отже,

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{90}{360} = 0,25.$$

Закони розподілу і для дискретних, і для неперервних випадкових величин містять про них найбільш повну інформацію. Стисло інформація про випадкові величини міститься в **чисельних характеристиках** випадкової величини, найбільш важливими серед яких є **математичне сподівання** та **дисперсія**.

## 2.5. Математичне сподівання випадкової величини

**Математичним сподіванням**  $M[X]$  дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх її можливих значень на їх ймовірності.

Нехай випадкова величина  $X$  набуває значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , імовірності яких відповідно дорівнюють  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Тоді математичне сподівання  $M[X]$  випадкової величини  $X$  визначається так:

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i. \quad (2.22)$$



Зауважимо, що значення математичного сподівання випадкової величини не є випадковим ( $M[X]$  – стала величина).

*Приклад 2.4.* Знайти математичне сподівання для дискретної величини, яка підкоряється біноміальному розподіленню  $\left(p = q = \frac{1}{2}\right)$ , при: а)  $n = 2$  та б)  $n = 4$  (див. приклад 2.1).

*Розв'язок.* а)  $m_x^a = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ;

б)  $m_x^b = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$ .

*Приклад 2.5.* Знайти математичне сподівання числа влучень при одному пострілі по мішені, якщо ймовірність влучення при одному пострілі  $p$ .

*Розв'язок.* Позначимо 1 – влучення при одному пострілі, а 0 – промах. Тоді закон розподілу випадкової величини представимо у вигляді таблиці:

$x_i$	0	1
$p_i$	$q$	$p$

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Тобто при одному випробуванні математичне сподівання числа подій чисельно дорівнює ймовірності появи цієї події.

### **Властивості математичного сподівання**

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює її значенню:

$$M[C] = C. \quad (2.23)$$

*Доведення.* Будемо розглядати сталу  $C$  як дискретну випадкову величину, яка набуває значення, що дорівнює  $C$ , із імовірністю  $p = 1$ . Математичне сподівання дорівнює добутку можливих значень на їх імовірність:  $M[C] = C \cdot 1 = C$ .

2. Математичне сподівання добутку сталої величини на випадкову дорівнює добутку сталої величини на математичне сподівання випадкової величини:

$$M[C \cdot X] = C \cdot M[X]. \quad (2.24)$$

*Доведення.* Нехай випадкова величина задається законом розподілу ймовірностей:

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Зрозуміло, що величина  $C \cdot X$  також можна розглядати як випадкову з можливими значеннями  $C \cdot x_1, C \cdot x_2, \dots, C \cdot x_n$ .

Які ймовірності цих можливих значень? Для того, щоб величина  $C \cdot X$  набула значення  $C \cdot x_i$ , необхідно й достатньо, щоб величина  $X$  набула значення  $x_i$ . Ймовірність цієї події дорівнює  $p_i$ , отже, і ймовірність того, що  $C \cdot X$  набуде значення  $C \cdot x_i$ , також дорівнює  $p_i$ . Аналогічно розраховуються ймовірності і для інших значень. Отже, закон розподілення випадкової величини  $C \cdot X$  такий:

$C \cdot X$	$C \cdot x_1$	$C \cdot x_2$	...	$C \cdot x_n$
$P_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Математичне сподівання випадкової величини  $C \cdot X$  дорівнює:

$$\begin{aligned} M[C \cdot X] &= C \cdot x_1 \cdot p_1 + C \cdot x_2 \cdot p_2 + \dots + C \cdot x_n \cdot p_n = \\ &= C \cdot (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n) = C \cdot M[X]. \end{aligned}$$

3. *Математичне сподівання алгебраїчної суми двох випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин:*

$$M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]. \quad (2.25)$$

*Доведення.* Нехай випадкові величини  $X$  і  $Y$  задаються законами розподілення ймовірностей:

$X_i$	$x_1$	$x_2$
$p_i$	$p_1$	$p_2$
$Y_i$	$y_1$	$y_2$
$g_i$	$g_1$	$g_2$

Складемо всі можливі  $X + Y$ , для чого до кожного можливого значення  $X$  будемо додавати можливе значення  $Y$  та отримаємо  $x_1 + y_1, x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_2 + y_2$ . Позначимо ймовірності цих значень відповідно через  $p_{11}, p_{12}, p_{21}$  і  $p_{22}$ .

Математичне сподівання величини  $X + Y$  дорівнює сумі добутку можливих значень на їхні ймовірності:

$$\begin{aligned}
 M[X+Y] &= (x_1 + y_1) \cdot p_{11} + (x_1 + y_2) \cdot p_{12} + \\
 & (x_2 + y_1) \cdot p_{21} + (x_2 + y_2) \cdot p_{22} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow x_1 \cdot (p_{11} + p_{12}) + x_2 \cdot (p_{21} + p_{22}) \\
 & + y_1 \cdot (p_{11} + p_{21}) + y_2 \cdot (p_{12} + p_{22}).
 \end{aligned}$$

Доведемо, що  $p_{11} + p_{12} = p_1$ . Подія складається з того, що  $X$  набуде значення  $x_1$  (ймовірність цієї події дорівнює  $p_1$ ), тягне за собою подію, яка складається з того, що  $X+Y$  набуде значення  $x_1 + y_1$  чи  $x_1 + y_2$  (імовірність цієї події дорівнює  $p_{11} + p_{12}$ ) і навпаки.

З цього можна записати  $p_{11} + p_{12} = p_1$ .

Аналогічно доводяться рівності:

$$p_{21} + p_{22} = p_2;$$

$$p_{11} + p_{21} = g_1;$$

$$p_{12} + p_{22} = g_2.$$

Якщо підставити останні рівняння і передостаннє, то отримуємо:

$$\begin{aligned}
 M[X+Y] &= (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2) + (y_1 \cdot g_1 + y_2 \cdot g_2) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow M[X+Y] = M[X] + M[Y].
 \end{aligned}$$

Ураховуючи доведену властивість, можна записати для різниці випадкових величин:

$$M[X - Y] = M[X + (-Y)] = M[X] + M[-Y] = M[X] - M[Y].$$

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин (або кількох взаємно незалежних випадкових величин) дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]. \quad (2.26)$$

Доведення. Нехай незалежні випадкові величини  $X$  та  $Y$  задаються власними законами розподілення ймовірностей:

$X_i$	$x_1$	$x_2$
$p_i$	$p_1$	$p_2$
$Y_i$	$y_1$	$y_2$
$g_i$	$g_1$	$g_2$

Складемо всі значення, які може набувати випадкова величина  $X \cdot Y$ , для чого перемножимо всі можливі значення  $X$  на кожне можливе значення  $Y$  та отримуємо:  $x_1 \cdot y_1$ ;  $x_1 \cdot y_2$ ;  $x_2 \cdot y_1$ ;  $x_2 \cdot y_2$ .

Оскільки випадкові величини  $X$  і  $Y$  незалежні, то ймовірність того, що  $X \cdot Y$  набуде, наприклад, значення  $x_1 \cdot y_1$ , за теоремою множення ймовірностей незалежних подій, дорівнює  $p_1 \cdot g_1$ . Аналогічно розраховуються ймовірності й інших можливих значень добутку. У підсумку отримуємо такий закон розподілення величини  $XY$ .

$XY$	$x_1 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_2$
$p$	$p_1 \cdot g_1$	$p_2 \cdot g_1$	$p_1 \cdot g_2$	$p_2 \cdot g_2$

Математичне сподівання дорівнює сумі добутків усіх можливих значень на їх ймовірності:

$$M[X \cdot Y] = x_1 \cdot y_1 \cdot p_1 \cdot g_1 + x_2 \cdot y_1 \cdot p_2 \cdot g_1 + x_1 \cdot y_2 \cdot p_1 \cdot g_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot p_2 \cdot g_2.$$

Це рівняння можна записати в такому вигляді:

$$M[X \cdot Y] = y_1 \cdot g_1 \cdot (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2) + y_2 \cdot g_2 \cdot (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2) = (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2)(y_1 \cdot g_1 + y_2 \cdot g_2) = M[X] \cdot M[Y].$$

*Приклад 2.6.* Знайти математичне сподівання числа появи події  $A$  у  $n$  дослідах при ймовірності  $p$  появи в одному досліді.

*Розв'язок.* За властивістю (3) математичного сподівання маємо:

$$m_x = M\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \sum_{i=1}^n M[x_i].$$

У прикладі 2.5 було показано, що для одиничного досліді  $M[x_i] = p$ , отже

$$M[X] = n \cdot p. \quad (2.27)$$

**Зауваження.** У разі проведення послідовності експериментів (випробувань) за схемою Бернуллі математичне сподівання числа подій (випадкова величина  $X$ ) у цих випробуваннях обчислюється за спрощеними формулами:

- математичне сподівання числа  $X$  появ події в одному випробуванні дорівнює ймовірності  $p$  появи події в цьому випробуванні, тобто  $M(X) = p$ .

- математичне сподівання числа  $X$  появ події в  $n$  випробуваннях за схемою Бернуллі дорівнює добутку числа  $n$  випробувань на ймовірність  $p$  появи події в одному випробуванні, тобто  $M[X] = n \cdot p$ .

**Імовірнісний зміст математичного сподівання:** математичне сподівання випадкової величини  $X$  наближено дорівнює середньому арифметичному зваженому її спостережуваних значень.

Задача визначення математичного сподівання аналогічна знаходженню центра тяжіння в механіці.

Якщо  $x_1$  – координата тіла з масою  $m_1$ , а  $x_2$  – з масою  $m_2$ , то за правилом важеля  $m_1 \cdot l_1 = m_2 \cdot l_2$ , або  $m_1 \cdot (x_0 - x_1) = m_2 \cdot (x_2 - x_0)$ , де  $x_0$  – координата центра тяжіння (рис. 2.7).

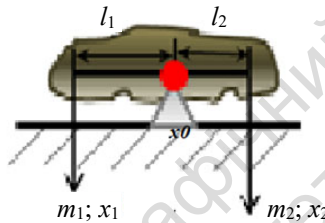


Рис. 2.7. Визначення центра тяжіння в механіці

$$m_1 \cdot (x_0 - x_1) = m_2 \cdot (x_2 - x_0) \Rightarrow x_0 = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.28)$$

Загалом формулу (2.28) легко можна записати на довільне число мас:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (2.29)$$

тобто координата центра тяжіння є середнє зважене координат усіх мас.

Якщо позначити середнє зважене всіх мас через  $M[X]$ , заміняючи маси  $m_i$  на відповідні їм ймовірності  $p_i$ , отримаємо:

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i,$$

де знаменник у формулі перетворюється на 1 через умову нормування.

Зауважимо, що математичне сподівання  $M[X]$  випадкової величини  $X$  є точка числової прямої, в околі якої "розсіяні" її значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Знайдемо математичні сподівання для описаних вище законів розподілу.

- Для **біноміального закону** розподілення математичне сподівання можна розраховувати або за формулою (2.22), або ж за скороченою формулою (2.27).

- **Математичне сподівання дискретної випадкової величини, яка підкоряється розподіленню Пуассона**

$$\begin{aligned}
 M[k] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-v} \cdot v^k}{k!} = \\
 &= e^{-v} \cdot v \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^v} = e^{-v} \cdot v \cdot e^v = v.
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Отже, показано, що параметр  $v$ , що входить у розподілення Пуассона, виконує роль математичного сподівання.

- **Математичне сподівання для неперервної рівномірно розподіленої випадкової величини**

У випадку неперервних випадкових величин закон розподілу їхніх імовірностей описують за допомогою густини розподілу  $f(x)$ . Ураховуючи цей факт, а також неперервність самої випадкової величини  $X$ , формула для розрахунку математичного сподівання має переписуватися для неперервних випадкових величин так:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \Rightarrow M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx. \tag{2.31}$$

Для неперервної випадкової величини, що рівномірно розподілена на проміжку  $[a; b]$  рівняння (2.31) набуває вигляду:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx. \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 M(X) &= \int_a^b x \cdot f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x dx = \\
 &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.
 \end{aligned}$$

Отже, математичне сподівання для випадкової величини  $X$ , що рівномірно розподілена на проміжку  $[a; b]$  дорівнює:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}.$$

## 2.6. Дисперсія випадкової величини

На практиці часто необхідно оцінити розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення (математичного сподівання). На перший погляд може здатися, що для оцінки розсіювання простіше всього розрахувати всі можливі значення відхилення випадкової величини та потім знайти їх середнє значення.

**Відхиленням дискретної випадкової величини**  $X$  від її математичного сподівання  $M[X]$  називається різниця  $X - M(X)$ .

Відхилення  $X - M(X)$  є також дискретна випадкова величина, яка має закон розподілу. Проте треба зауважити, що *математичне сподівання відхилення*  $M[X - M(X)]$  дорівнює нулю:

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

З останньої рівності випливає, що середнє значення розсіювання випадкової величини  $X$  навколо її математичного сподівання неможливо характеризувати за допомогою зваженої суми відхилень  $x_i - M(X)$ , бо ці різниці мають різні знаки і в сумі вони взаємно анулюються. У такому разі можна було б узяти зважену суму абсолютних значень цих різниць  $x_i - M(X)$ . Однак на практиці середнє значення розсіювання значень випадкової величини

$X$  навколо її математичного сподівання  $M[X]$  частіше оцінюють за допомогою квадрата відхилень випадкової величини від її математичного сподівання  $[X - M(X)]^2$ .

Розсіювання випадкової величини навколо математичного сподівання характеризує **дисперсія ( $D_x$ )**.

**Дисперсією ( $D_x$ )** називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання, тобто:

$$D_x = D[x] = M\left\{(X - M[X])^2\right\} = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^2 \cdot p_i.$$

Дисперсію також можна записати як:

$$D_x = D[x] = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (x_i - m_x)^2. \quad (2.33)$$

Використовуючи мову моментів, математичне сподівання (рівняння 2.22) можна трактувати як **початковий момент першого ступеня** ("початковий" означає, що відрахований від довільного початку координат). Дисперсію на мові моментів називають **центральним квадратичним моментом**. Доречним буде введення поняття **центрованої випадкової величини  $x$** :

$$x = x_i - m_x. \quad (2.34)$$

Величини  $x$  та  $x$  збігаються при  $m_x = 0$ , тобто коли початок координат розташований у точці, що дорівнює математичному сподіванню. З урахуванням (2.34) формулу (2.33) можна записати так:

$$D_x = \sum_{i=1}^n p_i (x_i)^2. \quad (2.35)$$

Формула (2.35) формально дозволяє трактувати дисперсію як математичне сподівання квадрата центрованої випадкової величини:

$$D_x = M\left[\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}\right]. \quad (2.36)$$

Із дисперсією тісно пов'язаний другий початковий момент (перший початковий момент це є математичне сподівання,



другий центральний момент це є дисперсія, для другого початкового моменту немає спеціального терміна):

$$\alpha_2[x] = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i^2. \quad (2.37)$$

Другий початковий момент можна записати через символ математичного сподівання:

$$\alpha_2[x] = M[x^2]. \quad (2.38)$$

Можна знайти зв'язок між  $\alpha_2[x]$  і  $D_x$ , використовуючи властивості математичного сподівання:

$$\begin{aligned} D_x &= \sum_{i=1}^n p_i \cdot (x_i - m_x)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \cdot (x_i)^2 - \sum_{i=1}^n 2m_x \cdot p_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^n p_i \cdot m_x^2 = \\ &= \alpha_2[x] - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2[x] - m_x^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Також отриману формулу (2.39) можна записати так:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Формула (2.39) може використовуватися разом із формулою (2.33) для обчислення дисперсії. Розглянемо це на конкретних прикладах.

*Приклад 2.7.* Двічі кидаємо монету. Знайти дисперсію випадкової величини (появи решки), яка підкоряється біноміальному розподіленню.

*Розв'язок.*  $p = 1/2$  та  $n = 2$ .  $m_x = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

I. Розрахуємо дисперсію за формулою (2.33).

**Таблиця 2.4**

	$x_i$	$p_i$	$x_i - m_x$	$(x_i - m_x)^2$	$p_i \cdot (x_i - m_x)^2$
	0	1/4	-1	1	1/4
	1	1/2	0	0	0
	2	1/4	1	1	1/4
$\Sigma$		1	0		$D_x = 1/2$

II. Розрахуємо дисперсію за формулою (2.39):

**Таблиця 2.5**

	$x_i$	$p_i$	$x_i^2$	$p_i \cdot x_i^2$
	0	1/4	0	0
	1	1/2	1	1/2
	2	1/4	4	1
$\Sigma$				$\alpha_2 = 3/2$

Отримуємо значення для дисперсії  $D_x = 3/2 - 1^2 = 1/2$ , яке повністю збігається зі значенням, отриманим за формулою (2.33). Треба підкреслити, що розрахунки за формулою (2.39) більш прості.

**Приклад 2.8.** Знайти дисперсію при одному пострілі в мішень, якщо ймовірність влучання дорівнює  $p$ . Промах – 0, влучання – 1.

*Розв'язок.*

$$m_x = p;$$

$$\alpha_2[x] = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p;$$

$$\begin{aligned} D_x &= p \cdot (1 - p)^2 + q \cdot (0 - p)^2 = \\ &= p \cdot q^2 + q \cdot p^2 = p \cdot q \cdot (p + q) = p \cdot q. \end{aligned}$$

Розрахунки за формулою (2.39) дають аналогічний результат:

$$D_x = p - p^2 = p \cdot (1 - p) = p \cdot q. \quad (2.40)$$

### **Властивості дисперсії**

1. Дисперсія не випадкової величини дорівнює нулю:

$$D[C] = 1 \cdot (C - m_C)^2 = 1 \cdot (C - C)^2 = 0. \quad (2.41)$$

2. Сталій множник можна винести за знак дисперсії, підносячи його до квадрата, тобто

$$D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]. \quad (2.42)$$

**Доведення.** Враховуючи властивість математичного сподівання ( $M[CX] = CM[X]$ ) одержимо:

$$\begin{aligned} D[C \cdot X] &= M\left\{(C \cdot X - M[C \cdot X])^2\right\} = \\ &= M\left\{C^2 \cdot (X - M[X])^2\right\} = C^2 \cdot M\left\{(X - M[X])^2\right\} = C^2 \cdot D[X]. \end{aligned}$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин (або кількох взаємно незалежних величин) дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(x + y) = D[x] + D[y]. \quad (2.43)$$

*Доведення.*

$$\begin{aligned} D(x + y) &= M[(x + y)^2] - [M(x + y)]^2 = \\ &= M[x^2 + 2x \cdot y + y^2] - [M(x) + M(y)]^2 = \\ &= M[x^2] + 2M[x \cdot y] + M[y^2] - (M[x])^2 - 2M[x] \cdot M[y] - (M[y])^2 = \\ &= \{M[x^2] - (M[x])^2\} + \{M[y^2] - (M[y])^2\} - \\ &\quad - 2M[x] \cdot M[y] + 2M[x] \cdot M[y] = D[x] + D[y]. \end{aligned}$$

Для довільної кількості незалежних випадкових величин можна записати:

$$D\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \sum_{i=1}^n D[x_i]. \quad (2.44)$$

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(x - y) = D[x] + D[y]. \quad (2.45)$$

*Доведення.*

$$\begin{aligned} D(x - y) &= M[(x - y)^2] - [M(x - y)]^2 = \\ &= M[x^2 - 2x \cdot y + y^2] - [M(x) - M(y)]^2 = \\ &= M[x^2] - 2M[x \cdot y] + M[y^2] - (M[x])^2 + \\ &\quad + 2M[x] \cdot M[y] - (M[y])^2 = \{M[x^2] - (M[x])^2\} + \\ &\quad + \{M[y^2] - (M[y])^2\} - 2M[x] \cdot M[y] + 2M[x] \cdot M[y] = D[x] + D[y]. \end{aligned}$$

Для неперервних випадкових величин дисперсія визначається так:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x) dx. \quad (2.46)$$

Або з використанням другого початкового моменту дисперсію можна розраховувати за наступною формулою:

$$D_x = \alpha_2[x] - m_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - m_x^2, \quad (2.47)$$

де

$$\alpha_2[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx. \quad (2.48)$$

Використання дисперсії для характеристики розсіювання випадкової величини навколо математичного сподівання супроводжується однією незручністю: якщо випадкова величина вимірюється в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься у квадратах цих одиниць. Тому доцільно мати характеристику розсіювання значень випадкової величини тієї ж вимірності, що й сама величина. Такою характеристикою є *середньо квадратичне відхилення* ( $\sigma_x$ ).

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (2.49)$$

Після знайомства із властивостями дисперсії можна переходити до отримання виразів для дисперсій під час розгляду відомих законів розподілу випадкових величин: біноміального, геометричного, розподілу Пуассона й закону рівномірної густини.

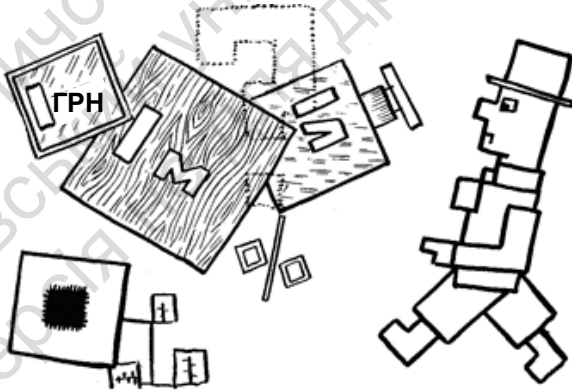


Рис. 2.8. Розмірність дисперсії відповідає розмірності квадрата  $X$

*Приклад 2.9.* Знайдемо дисперсію числа появи події  $A$  у  $n$  дослідах за ймовірності  $p$  появи в одному досліді.

*Розв'язок.* Для одного досліду  $D_x = p \cdot q$ . (згідно з наведеним вище прикладом). Усі досліди рівноправні, отже з формули (2.44) маємо:

$$D_x = n \cdot p \cdot q. \quad (2.50)$$

*Зауваження.* У разі проведення послідовності  $n$  експериментів (випробувань) за схемою Бернуллі дисперсія випадкової величини  $X$  – числа появ події  $A$  в цих випробуваннях обчислюється за скороченою формулою  $D_x = n \cdot p \cdot q$ .

У наступному прикладі подивимось, як розраховується математичне сподівання і дисперсія для *геометричного закону розподілу*.

*Приклад 2.10.* Кожна з чотирьох електролампочок має дефект із імовірністю  $q$ , що дорівнює  $0,1$  ( $p = 1 - 0,1 = 0,9$  – імовірність того, що лампочка дефекту не має). Послідовно беруть по одній лампочці, угвинчують у патрон і вмикають електричний струм. Якщо під час увімкнення струму лампочка перегорить, то вгвинчують наступну. Написати закон розподілу випадкової величини  $X$  – числа лампочок, які випробовуватимуться, та обчислити  $D[X]$  і  $\sigma[X]$ .

*Розв'язок.* Описана в задачі дискретна випадкова величина  $X$  набуває можливих значень:  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ .

Імовірності подій  $X = x_i, i = 1, 2, 3$  обчислюємо за формулою:

$$\begin{aligned} P(X = m) &= q^{m-1} \cdot p; \\ p_1 = P(X = 1) &= (0,1)^0 \cdot 0,9 = 0,9; \\ p_2 = P(X = 2) &= (0,1) \cdot 0,9 = 0,09; \\ p_3 = P(X = 3) &= (0,1)^2 \cdot 0,9 = 0,009. \end{aligned}$$

Для обчислення ймовірності події  $X = 4$  використовуємо той факт, що ця подія є сумою двох несумісних подій:  $B_1$  – під час послідовного випробування 4 лампочок три з них перегорять, а четверта не перегорить;  $B_2$  – під час послідовного випробування 4 лампочок усі вони перегорять. Тому:

$$p_4 = P(X = 4) = (0,1)^3 \cdot 0,9 + (0,1)^4 = 0,001.$$

Отже, закон розподілу випадкової величини  $X$  має вигляд:

$X = x_i,$	1	2	3	4
$P = P_i$	0,9	0,09	0,009	0,001

Далі обчислюємо:

$$\begin{aligned}
 M[X] &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i ; \\
 M[X] &= 1 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0,009 + 4 \cdot 0,001 = \\
 &= 0,9 + 0,18 + 0,027 + 0,004 = 1,111 ; \\
 M[X^2] &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i ; \\
 M[X^2] &= 1 \cdot 0,9 + 4 \cdot 0,09 + 9 \cdot 0,009 + 16 \cdot 0,001 = \\
 &= 0,9 + 0,36 + 0,081 + 0,016 = 1,357 ; \\
 D[X] &= M[X^2] - (M[X])^2 ; \\
 D[X] &= 1,357 - 1,111^2 = 0,1227 ; \\
 \sigma_x &= \sqrt{D_x} = \sqrt{0,1227} = 0,35 .
 \end{aligned}$$

Знайдемо дисперсію випадкової величини, яка підкоряється розподілу Пуассона (відомо, що  $m_x = v$ ).

$$\begin{aligned}
 \alpha_2[k] &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-v} \cdot \frac{v^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + k - k) \cdot e^{-v} \cdot \frac{v^k}{k!} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-v} \cdot \frac{v^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-v} \cdot \frac{v^k}{k!} = \\
 &= v \cdot e^{-v} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^v} + v^2 \cdot e^{-v} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^v} = v + v^2 . \\
 D_k &= \alpha_2[k] - \{m[k]\}^2 = v + v^2 - v^2 = v . \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

*Зауваження.* Розподілення Пуассона має унікальну особливість: параметр  $v$ , що входить у нього, виконує одночасно роль математичного сподівання й дисперсії. Якщо математичне сподівання визначає положення центра мас, а дисперсія характеризує розкид точок навколо математичного сподівання, то, відповідно, за умови збільшення параметра  $v$  крива розподілу Пуассона повинна одночасно зсувуватись уздовж осі  $Ox$  і при цьому "розповзатись" вздовж цієї осі, збільшуючи розкид точок, при цьому висота максимуму розподілу повинна зменшуватись, тому що умова

нормування має виконуватись для будь-якого розподілу. Цю особливість закону розподілу Пуассона ілюструє такий рисунок.

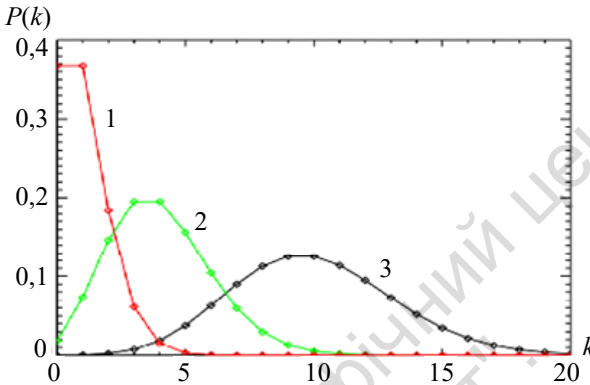


Рис. 2.9. Розподілення Пуассона за різних значень параметра  $\nu$

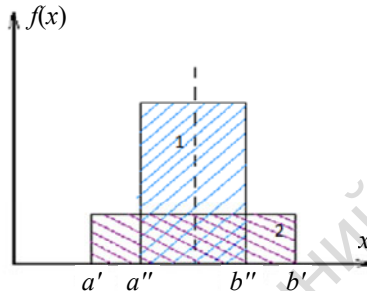
Вище наведені розрахунки дисперсії для дискретних законів розподілу випадкових величин. Розглянемо, чому дорівнює дисперсія для *неперервної рівномірно розподіленої випадкової величини*  $X$ .

$$\begin{aligned} \alpha_2[x] &= \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^2 + a \cdot b + a^2}{3}, \\ D_x &= \alpha_2[x] - m_x^2 = \frac{b^2 + a \cdot b + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{4b^2 + 4a \cdot b + 4a^2 - 3b^2 - 6a \cdot b - 3a^2}{12} = \frac{b^2 - 2a \cdot b + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Отже, для *неперервної рівномірно розподіленої випадкової величини*  $X$  дисперсію можна розраховувати за формулою:

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2.52)$$

На рис. 2.10. зображено зміни, до яких приводить збільшення дисперсії для неперервної рівномірно розподіленої випадкової величини.



**Рис. 2.10. Неперервний рівномірний розподіл за різних значень дисперсії**

Зображення на рис. 2.10 відповідають таким умовам:

$$D'_x = \frac{(b' - a')^2}{12} > D''_x = \frac{(b'' - a'')^2}{12},$$

з чого видно, що меншому значенню дисперсії відповідає більш компактне розташування прямокутника навколо центра тяжіння (площі прямокутників мають бути рівними в силу умови нормування).

## 2.7. Формула Лапласа

Вище було показано, що за умови  $p \ll q$  і великих значеннях  $n$  біноміальний розподіл перетворюється в розподіл Пуассона (рівняння 2.5).

А що відбувається з біноміальним розподіленням при великих  $n$  і умові  $p \approx q$ ? Легко побачити, що використання формули Бернуллі при великих  $n$  ускладнене, оскільки формула потребує виконання дій із великими числами. Виникає питання: чи можна хоча б наближено розрахувати ймовірність, що нас цікавить, не використовуючи формулу Бернуллі? Виявляється, що можна. **Локальна теорема Лапласа** дає асимптотичну формулу, яка



дозволяє наближено знайти ймовірність появи події рівно  $k$  разів у  $n$  дослідах, якщо кількість дослідів досить велике.

Треба сказати, що для випадку  $p = 0,5$  асимптотичну формулу було знайдено в 1930 р. Муавром, а в 1783 р. Лаплас узагальнив її для будь-якого значення  $p$ , що відрізняється від 0 і 1. Тому ця теорема має назву локальної теореми Муавра – Лапласа.

**Локальна теорема Лапласа.** Якщо ймовірність  $p$  появи події  $A$  в кожному досліді постійна і відрізняється від 0 і 1, то  $P_n(k)$  того, що подія  $A$  з'явиться в  $n$  дослідах рівно  $k$  разів наближено дорівнює (тим точніше, чим більше  $n$ ):

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}}} \cdot \exp\left(-\frac{(k - n \cdot p)^2}{2n \cdot p \cdot q}\right). \quad (2.53)$$

## 2.8. Нормальний закон розподілення

Надзвичайно важливу роль у теорії ймовірностей відіграє нормальний закон розподілу (закон Гаусса). Нормальний закон розподілу широко застосовується в практичних задачах, він проявляється в усіх випадках, коли випадкова величина  $X$  є наслідком дії великого числа різних випадкових факторів, кожний з яких окремо має на величину  $X$  незначний вплив.

Відомо декілька форм нормального розподілу: *стандартна, загальна форма й центрована*.

Стандартну форму можна отримати з рівняння (2.53), для цього введемо параметр  $z$ , який дорівнюватиме:

$$z = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad (2.54)$$

тоді при зміні  $k$  на одиницю знайдемо  $\Delta z$  і підставимо отримані вирази в рівняння (2.53).

$$\Delta z = z_{k+1} - z_k = \frac{k+1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} - \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \Delta z. \quad (2.55)$$

Рівняння (2.55) виражає ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок  $\Delta z$ . Зі збільшенням  $n$  величина відрізка  $\Delta z$  почне зменшуватись і стане нескінченно малою –  $dz$ . Наслідком такого зменшення відрізка  $\Delta z$  буде перетворення дискретного біноміального розподілу при  $n \rightarrow \infty$  на неперервний розподіл із густиною  $f(z)$ :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \quad (2.56)$$

Отримане рівняння (2.56) носить назву **стандартної форми нормального розподілу**.

Для того, щоб перейти до загальної форми нормального розподілу потрібно згадати, що для біноміального розподілу числові характеристики можна розраховувати за скороченим формулами, а саме:

$$m_x = n \cdot p,$$

$$D_x = n \cdot p \cdot q \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{n \cdot p \cdot q}.$$

Спробуємо врахувати це для величини  $z$  і  $\Delta z$ :

$$z = \frac{x - m_x}{\sigma},$$

$$\Delta z = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{1}{\sigma} dx.$$

З останнього рівняння видно, що проміжки  $\Delta z$  і  $dx$  не дорівнюють один одному і відрізняються на множник  $\frac{1}{\sigma}$ . Отже, і густини розподілів  $f(z)$  і  $f(x)$  повинні відрізнятися між собою: для того, щоб розрахунок імовірності потрапляння випадкової величини був однаковим для обох густин розподілу  $f(z)$  і  $f(x)$ , необхідно виконання такого рівняння.

$$f(x) = \frac{f(z)}{\sigma},$$

тому

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.57)$$

Рівняння (2.57) описує нормальний розподіл у загальному вигляді, густина розподілу якого наведена на рис. 2.11.

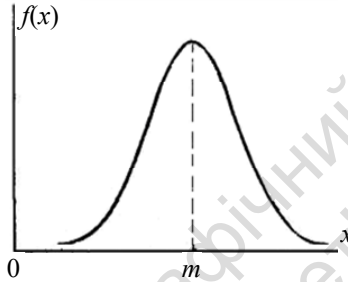


Рис. 2.11. Нормальне розподілення в загальному вигляді

Крива розподілення за нормальним законом має симетричний вигляд (рис. 2.11). Максимальна ордината кривої, що дорівнює  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ , відповідає точці  $x = m$ . При  $x \rightarrow \pm\infty$  крива асимптотично наближається до осі абсцис.

З'ясуємо зміст чисельних параметрів  $m$  та  $\sigma$ , що входять у вираз нормального закону. Доведемо, що величина  $m$  є ні що інше, як математичне сподівання, а величина  $\sigma$  – середньо квадратичне відхилення величини  $X$ . Для цього розрахуємо числові характеристики величини  $X$ .

Обидві форми нормального розподілення: і стандартна, і загальна мають задовольняти умові нормування. Перевіримо це твердження.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Тобто для стандартної форми нормального розподілення умова нормування виконується. При доведенні використовували відомий інтеграл Ейлера – Пуассона:  $\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-ax^2} dx$  (див. додаток табл. 6).

Доведемо виконання умови нормування для загальної форми нормального розподілення.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left. \begin{array}{l} t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} \\ dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma\sqrt{2} \cdot e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

Отже, умова нормування виконується для обох форм нормального розподілення.

Під час виведення основного рівняння нормального розподілу було прийнято, що  $m$  і  $\sigma$  є математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням, відповідно. Перевіримо це.

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left. \begin{array}{l} t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} \\ x = \sigma\sqrt{2} \cdot t + m \\ dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2} \cdot t + m) \cdot e^{-t^2} \cdot \sigma\sqrt{2} dt =$$

$$= \underbrace{\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2} dt}_0 + \underbrace{\frac{m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt}_{=2 \cdot \frac{m}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt} = m.$$

Тобто параметр  $m$  є математичним сподіванням величини  $X$ .

Розрахуємо дисперсію величини  $X$ . Зауважимо, що за умови  $m = 0$ , дисперсія тотожно збігається із другим початковим моментом, тобто маємо:

$$D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{-3/2} = \sigma^2.$$

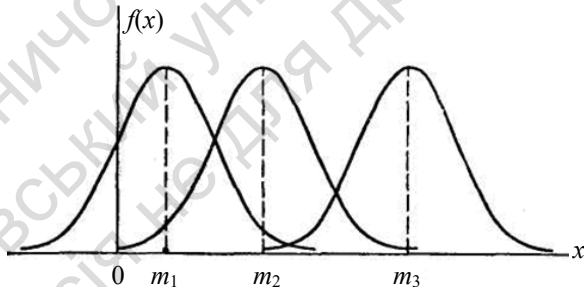
Отже, параметр  $\sigma$  є нічим іншим, як середньо квадратичним відхиленням.

За умови  $m = 0$  рівняння (2.57) перетворюється на (2.58) і набуває так званої **центрованої форми нормального розподілу**:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.58)$$

За умови  $\sigma = 1$  центрована форма нормального розподілення перетворюється у стандартну (рівняння 2.56).

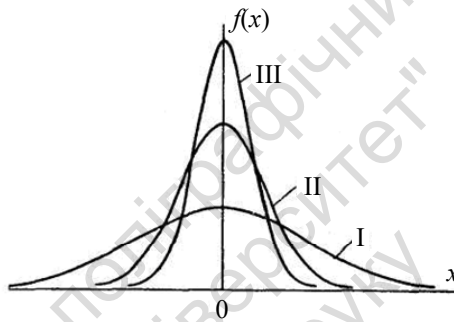
Якщо змінювати значення  $m$ , то крива нормального розподілення зміщуватиметься вздовж осі абсцис, не змінюючи своєї форми (рис. 2.12).



**Рис. 2.12.** нормальне розподілення з різними значеннями параметра  $m$

Параметр  $\sigma$  характеризує форму кривої розподілення. Це є характеристика розсіювання випадкової величини навколо математичного сподівання. Найбільша ордината кривої розподілення обернено пропорційна  $\sigma$ . Зі збільшенням  $\sigma$  максимальна ордината

зменшується. Оскільки площа кривої розподілення завжди повинна залишатися рівною одиниці (умова нормування), то при збільшенні  $\sigma$  крива розподілення стає більш плоскою, розтягуючись уздовж осі абсцис; а при зменшенні  $\sigma$  крива нормального розподілу навпаки витягується вгору, одночасно стискаючись із обох боків. На рис. 2.13 наведені три нормальні криві (I, II, III) за умови  $m = 0$  (центрована форма нормального розподілення). З них крива I відповідає найбільшому, а крива III – найменшому значенню  $\sigma$ . Площа під кривими I, II, III має дорівнювати одиниці (умова нормування).



**Рис. 2.13.** Нормальне розподілення з різними значеннями параметра  $\sigma$

На рис. 2.13 бачимо як сильно впливає навіть невелика зміна параметра  $\sigma$  на вид кривої розподілу. За малих  $\sigma$  розкидання випадкової величини малий і всі її значення концентруються навколо математичного сподівання (на рис. 2.13  $m = 0$ ); збільшення  $\sigma$  приводить до "розмивання" кривої Гаусса вздовж осі ординат і "розтягування" вздовж осі абсцис.

Розрахунок імовірності за допомогою нормального розподілення виконується так:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (2.59)$$

При підстановці  $t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$  та  $dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}}$  у (2.59) можна записати:

$$\begin{aligned}
 P(a < x < b) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) \cdot \sigma \cdot \sqrt{2} dt = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt.
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

Для розрахунку інтеграла (2.60) використовується **функція Лапласа**:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.
 \tag{2.61}$$

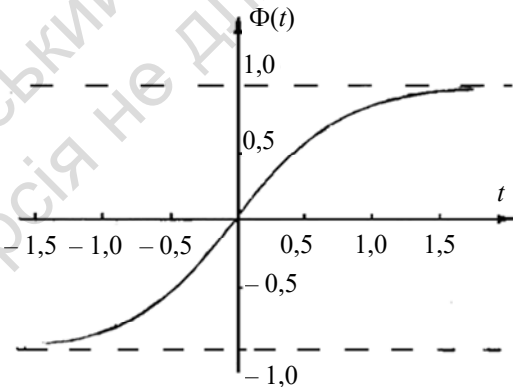
Розглянемо деякі властивості функції Лапласа.

1. Функція Лапласа за нульового аргументу ( $x = 0$ ) обертається в нуль:

$$\Phi(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^0 \exp(-t^2) dt = 0.
 \tag{2.62}$$

2. За умови  $t \rightarrow \infty$  функція Лапласа асимптотично наближається до одиниці:

$$\Phi(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.
 \tag{2.63}$$



**Рис. 2.14.** Графічне зображення функції Лапласа

3. Функція Лапласа непарна:

$$\Phi(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} \exp(-t^2) dt = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt = -\Phi(x). \quad (2.64)$$

На рис. 2.14 наведено графічне зображення функції Лапласа, яке ілюструє всі перелічені властивості. Значення  $\Phi(t)$  для ряду значень аргументу  $t$  наведені в таблицях додатку 1.

Використовуючи функцію Лапласа, можна знайти ймовірність  $P(\alpha < x < \beta)$  того, що випадкова величина  $x$ , яка підкоряється нормальному закону, опиниться на відрізку  $[\alpha, \beta]$ :

$$\begin{aligned} P(\alpha < x < \beta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt = \\ &= \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Отже,

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (2.65)$$

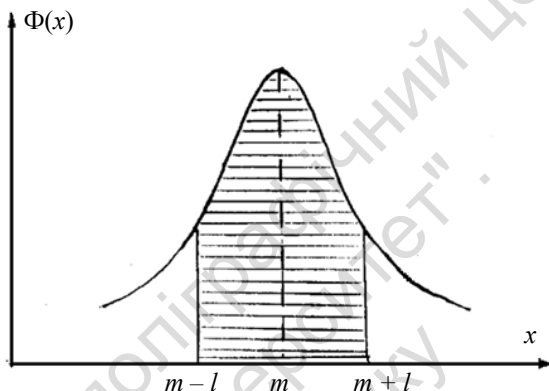
У формулі (2.65) використовується та обставина, що функція Лапласа дозволяє знайти ймовірність знаходження випадкової величини  $x$  на відрізку від початку координат до довільного числа ( $\alpha, \beta$  і ін.), тобто з допомогою  $\Phi(t)$  знаходимо ймовірність:  $P(0 < x < \beta)$  і  $P(0 < x < \alpha)$ , а їхня різниця дає ймовірність, що шукають.

Розглянемо тепер, чому дорівнює ймовірність знаходження неперервної випадкової величини  $x$ , що підкоряється нормальному закону, на відрізку  $(m-l; m+l)$ , який розташований симетрично відносно математичного сподівання  $m$ . На рис. 2.15 ця ймовірність дорівнює заштрихованій площі. Підставляючи в



рівняння (2.65) замість  $\beta = m + l$  і замість  $\alpha = m - l$ , отримуємо для значення ймовірності:

$$\begin{aligned} P(m - l < x < m + l) &= \frac{1}{2} \left[ \Phi \left( \frac{m + l - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) - \Phi \left( \frac{m - l - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \Phi \left( \frac{l}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \Phi \left( \frac{l}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] = \Phi \left( \frac{l}{\sigma\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$



**Рис. 2.15.** Імовірність знаходження неперервної випадкової величини  $x$ , що підкоряється нормальному закону, на відріжку  $(m - l; m + l)$ , який розташований симетрично відносно математичного сподівання  $m$

Цю формулу можна записати в більш компактному вигляді:

$$P(|x - m| < l) = \Phi \left( \frac{l}{\sigma\sqrt{2}} \right). \quad (2.66)$$

Нормальний закон розподілення (який часто називають законом Гаусса) грає винятково важливу роль у теорії ймовірностей і займає серед інших законів особливе положення. Головна особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є **граничним законом**, до якого наближаються інші закони розподілення.

Можна довести, що сума достатньо великого числа незалежних (чи слабо залежних) випадкових величин, які підкоряються

будь-яким законам розподілення (за умови виконання деяких нежорстких обмежень), підкоряється нормальному закону, і це виконується тим точніше, чим більше число випадкових величин додається одна до одної.

Це положення має назву *центральної граничної теореми*, яка формулюється так:

Якщо  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  є незалежними випадковими величинами, то закон розподілення їхньої суми  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$  необмежено

прямує до нормального розподілу за необмеженого зростання  $n$ .

Більшість випадкових величин, що зустрічаються на практиці, таких, наприклад, як помилки вимірювань, можуть бути представлені як сума достатньо великого числа порівняно малих доданків – елементарних помилок, кожна з яких викликана дією окремої причини, незалежної від інших. Яким би законам розподілення не були підкорені окремі елементарні помилки, особливості цих розподілень у сумі великої кількості доданків нівелюються, і сума підкоряється закону, близькому до нормального. Основне обмеження, що накладається на додавання помилок, полягає в тому, щоб вони всі рівномірно відігравали у загальній сумі відносно малу роль.

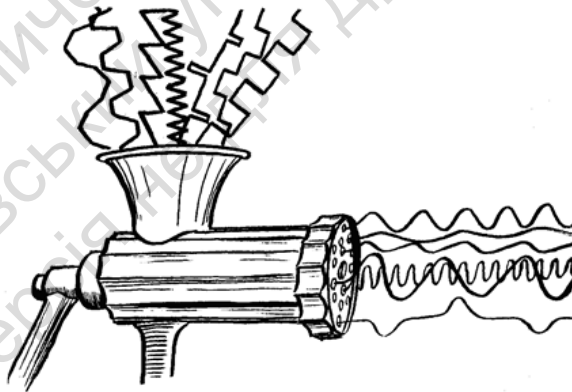


Рис. 2.16. Ілюстрація центральної граничної теореми

## 2.9. Двовимірна випадкова величина

На практиці, крім одновимірних випадкових величин, трапляються багатовимірні. Наприклад, прибуток навмання вибраного підприємця визначається кількома одновимірними випадковими величинами: обсягом випуску продукції, ринковими цінами на продукцію, ринковими цінами на сировину тощо.

Якщо на одному й тому ж просторі елементарних подій задано  $n$  одновимірних випадкових величин, то їхню впорядковану сукупність  $(x_1, x_2 \dots x_n)$  називають ***n*-вимірною випадковою величиною**, або ***системою n випадкових величин***, або ***n*-вимірним випадковим вектором**.

Ми зупинимося на розгляді двовимірної випадкової величини  $(x, y)$ . Перехід до випадкової величини більшої вимірності до принципів змін не призводить. Варто звернути увагу, що основні поняття і твердження для одновимірних дискретної та неперервної випадкових величин є аналогічними, тому для двовимірних дискретної й неперервної випадкових величин викладемо їх паралельно.

Двовимірну випадкову величину  $(x, y)$  називають ***дискретною***, якщо її складові  $x$  та  $y$  є дискретними одновимірними випадковими величинами, і ***неперервною***, якщо її складові  $x$  та  $y$  є неперервними одновимірними випадковими величинами. Складові  $x$  і  $y$  двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  називають її ***компонентами***.

Основною характеристикою двовимірної випадкової величини, як і одновимірної, є закон розподілу ймовірностей.

Для ***дискретної величини***: нехай  $p(x_i, y_j)$  – ймовірність того, що дискретна випадкова величина  $(x, y)$  набуде можливих значень  $(x_i, y_j)$ ,  $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$ . Іншими словами,  $p(x_i, y_j)$  – ймовірність того, що одночасно  $x$  набуде значення  $x_i$ , а  $y$  набуде значення  $y_j$ , тобто  $p(x_i, y_j) = P(x = x_i, y = y_j)$ .

Отже, ***законом розподілу ймовірностей (законом розподілу) двовимірної дискретної випадкової величини  $(x, y)$  називається перелік її можливих значень  $(x_i, y_j)$ ,  $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$  і їхніх ймовірностей  $p(x_i, y_j)$*** .

Закон розподілу ймовірностей записують у вигляді таблиці.

Таблиця 2.6

Закон розподілу ймовірностей випадкової величини  $(x, y)$ 

$x = x_i$ \ $y = y_j$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$p(y_j)$
$y_1$	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	...	$p(x_n, y_1)$	$p(y_1)$
$y_2$	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	...	$p(x_n, y_2)$	$p(y_2)$
...	...	...	...	...	...
$y_m$	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	...	$p(x_n, y_m)$	$p(y_m)$
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$	1

Варто зауважити, що останній рядок (стовпчик) цієї таблиці задає розподіл одновимірної компоненти  $x(y)$ . Решта таблиці описує закон розподілу дискретної випадкової величини  $(x, y)$ .

Справді, розподіл одновимірної випадкової величини  $x$  можна отримати, обчисливши за даними табл. 2.6 імовірності  $p(x = x_i)$ , які позначено через  $p(x_i)$ . Для цього достатньо зауважити, що подію  $(x = x_i)$  можна представити як суму попарно несумісних подій і за правилом додавання ймовірностей несумісних подій одержимо:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогічно можна побудувати розподіл одновимірної випадкової величини  $y$ , обчисливши ймовірності  $p(y = y_j) = p(y_j)$ :

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j),$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Оскільки кожна із систем подій утворює повну групу попарно несумісних подій

$$(x = x_i, y = y_j) \quad (i = 1 \dots n, j = 1 \dots m),$$

то

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(y_j) = 1. \quad (2.67)$$

**Приклад 2.11.** Одночасно кидають кубик і монету, який вигляд матиме закон розподілу двовимірної випадкової величини  $(x, y)$ ? Вважати  $x$  – число очок, що випадають на верхній грані кубика,  $y$  – число появ герба на монеті.

*Розв'язок.* У цій задачі випадкова величина  $x$  може набути одного з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, а випадкова величина  $y$  – одного з чисел 0;1. Звідки випливає, що  $(x, y)$  – дискретна випадкова величина. Оскільки події  $x = x_i, y = y_j$  – незалежні, то

$$p(x_i, y_j) = p(x = x_i) \cdot p(y = y_j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12},$$

і закон розподілу дискретної випадкової величини  $(x, y)$  матиме вигляд:

$x = x_i \backslash y = y_j$	1	2	3	4	5	6	$p(y_j)$
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
$p(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

У випадку *неперервної величини* розподіл ймовірностей двовимірної, як і для одновимірної, неперервної випадкової величини  $(x, y)$  визначається за допомогою функції або густини розподілу. Функцією розподілу ймовірностей можна характеризувати й дискретну двовимірну випадкову величину.

**Функцією розподілу** ймовірностей двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  називається функція  $F(x, y)$ , яка для будь-яких чисел  $x$  і  $y$  визначає ймовірність сумісної появи подій  $X < x$  і  $Y < y$ , тобто:

$$F(x, y) = p(X < x, Y < y). \quad (2.68)$$

Іншими словами, функція розподілу  $F(x, y)$  двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  є ймовірністю того, що її складова  $X$  набуде значення, меншого за число  $x$ , і складова  $Y$  набуде одночасно значення, меншого за число  $y$ .

Рівність (2.68) означає, що функція розподілу  $F(x, y)$  є ймовірністю того, що значення двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  (випадкові точки) потрапляють у безмежний прямокутник із вершиною в точці  $(x, y)$ , який розміщений нижче і ліворуч від цієї вершини (рис. 2.17).

Функція розподілу  $F(x, y)$  має такі *властивості*:

- Значення функції розподілу задовольняють подвійній нерівності:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1; \quad (2.69)$$

- $F(x, y)$  є неспадною функцією за кожним аргументом, тобто:
 
$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \text{ якщо } x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1; \quad (2.70)$$
- Для функції  $F(x, y)$  виконуються граничні співвідношення:
 
$$F(-\infty, y) = 0, F(x, -\infty) = 0,$$

$$F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1. \quad (2.71)$$

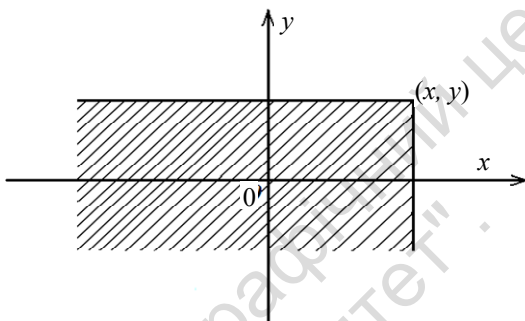


Рис. 2.17. Графічне зображення рівняння (2.68)

*Доведення:* рівності  $F(-\infty, y) = 0$ ,  $F(x, -\infty) = 0$ ,  $F(-\infty, -\infty) = 0$  випливають із того, що відповідні сумісні події є неможливими і їхні ймовірності дорівнюють нулю; рівність  $F(+\infty, +\infty) = 1$  обумовлена тим, що сумісна подія  $x < \infty$  і  $y < \infty$  – вірогідна та її ймовірність дорівнює одиниці.

Цим твердженням можна надати геометричну інтерпретацію на рис. 2.17: якщо  $x \rightarrow -\infty$ , то права сторона безмежного прямокутника переміщується необмежено вліво і при цьому ймовірність того, що випадкова точка потрапить у цей прямокутник, наближається до нуля. Аналогічну геометричну інтерпретацію маємо, коли  $y \rightarrow -\infty$  або  $x \rightarrow -\infty$  і  $y \rightarrow -\infty$ .

- Якщо  $y \rightarrow \infty$ , функція розподілу  $F(x, y)$  двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  наближається до функції розподілу  $F_1(x)$  складової  $x$ , а якщо  $x \rightarrow \infty$  до функції розподілу  $F_2(y)$  складової  $y$ , тобто:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(x, \infty) = F_1(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F(\infty, y) = F_2(y).$$

*Доведення:* перше з цих співвідношень випливає з того, що подія  $y < \infty$  є вірогідною й тому

$$F(x, \infty) = p(X < x | y < \infty) \approx p(X < x) = F_1(x),$$

тобто в цьому випадку  $F(x, \infty)$  є ймовірністю події  $X < x$  або функцією розподілу складової  $X$ .

• Ймовірність того, що значення двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  потраплять у прямокутник  $Q = \{(x, y): a \leq x < b, c \leq y < d\}$  обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} P(a \leq x < b, c \leq y < d) &\approx \\ &\approx [F(b, d) - F(a, d)] - [F(b, c) - F(a, c)]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Варто зауважити, що у випадку неперервності випадкової величини  $(x, y)$  функція розподілу  $F(x, y)$  теж є неперервною і для будь-яких дійсних чисел  $x_0$  і  $y_0$  ймовірність  $p(x = x_0, y = y_0) = 0$ . У цьому випадку формулу (2.72) можна застосовувати також для обчислення ймовірностей:

$$\begin{aligned} P(a \leq x < b, c \leq y < d) &= P(a < x \leq b, c < y \leq d) = \\ &= P(a < x < b, c < y < d) = P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d). \end{aligned}$$

*Приклад 2.12.* Функція розподілу ймовірностей двовимірної неперервної випадкової величини  $(x, y)$  має вигляд:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq -6, \text{ або } y \leq -2; \\ \frac{x+6}{8}, & -6 < x \leq 2, y > 4; \\ \frac{(x+6)(y+2)}{48}, & -6 < x \leq 2, -2 < y \leq 4; \\ \frac{(y+2)}{6}, & x > 2, -2 < y \leq 4; \\ 1, & x > 2, y > 4. \end{cases}$$

Обчислити  $p(-2 < x < 1, -1 < y < 3)$ .

*Розв'язок.* За формулою (2.57), враховуючи останнє зауваження, маємо:

$$\begin{aligned} p(-2 < x < 1, -1 < y < 3) &= \\ &= [F(1, 3) - F(-2, 3)] - [F(1, -1) - F(-2, -1)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{(1+6)(3+2)}{48} - \frac{(-2+6)(3+2)}{48} \right] - \\
&\left[ \frac{(1+6)(-1+2)}{48} - \frac{(-2+6)(-1+2)}{48} \right] = \\
&= \frac{1}{48}(35 - 20 - 7 + 4) = \frac{1}{48} \cdot 12 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

**Густиною (щільністю)** розподілу ймовірностей  $f(x,y)$  двовимірної неперервної випадкової величини  $(x, y)$  називають другу мішану похідну від її функції розподілу, тобто:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2.73)$$

Густину розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини ще називають **двовимірною густиною розподілу**.

Густина (щільність) розподілу ймовірностей  $f(x,y)$  має такі властивості:

- Густина розподілу ймовірностей невід'ємна:  $f(x,y) \geq 0$ .
- Подвійний невластний інтеграл із безмежними межами інтегрування від двовимірної густини розподілу дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (2.74)$$

(Подвійний інтеграл (2.74) обчислюється так: спочатку обчислюють інтеграл за однією змінною, вважаючи другу сталою, а потім за другою змінною).

- Якщо всі значення  $x$  і  $y$  двовимірної випадкової величини  $(x,y)$  містяться у прямокутнику  $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$  і  $f(x,y)$  – густина її розподілу, то

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = 1. \quad (2.75)$$

- Функція розподілу  $F(x,y)$  двовимірної неперервної випадкової величини  $(x,y)$  пов'язана з двовимірною густиною  $f(x,y)$  цієї величини за допомогою рівності:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.76)$$



• Якщо можливі значення двовимірної неперервної випадкової величини  $(x,y)$  розміщені у прямокутнику  $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$ , то формула (2.54) набуває вигляду:

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.77)$$

• Імовірність того, що значення двовимірної неперервної випадкової величини  $(x,y)$  потраплять у прямокутник  $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$  виражається формулою:

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy. \quad (2.78)$$

• Якщо  $f(x,y)$  – густина розподілу двовимірної неперервної випадкової величини  $(x,y)$ , то густини  $f_1(x)$  і  $f_2(y)$  розподілу одновимірних випадкових величин  $x$  і  $y$  відповідно визначаються за формулами:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad (2.79)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (2.80)$$

Обґрунтуємо співвідношення (2.79) аналогічними міркуваннями, як і у випадку густини розподілу одновимірної випадкової величини.

Якщо  $F_1(x)$  – функція розподілу складової  $x$ , то її густина розподілу дорівнює:

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}.$$

Функція розподілу  $F(x,y)$  двовимірної випадкової величини  $(x,y)$  виражається через густину її розподілу  $f(x,y)$  рівністю (2.76), із якої випливає, що

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Диференціюючи обидві частини одержаної рівності по  $x$ , одержимо

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Аналогічно можна обґрунтувати і співвідношення (2.80).

**Приклад 2.13.** Двовимірна неперервна випадкова величина  $(x, y)$  задана густиною розподілу:

$$f(x, y) = \begin{cases} a = \text{const}, & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q; \end{cases}$$

де  $Q = \{(x, y) : -1 < x < 3, 2 < y < 4\}$ .

Знайти  $a$  і  $F(x, y)$ . Обчислити  $p(0 < x < 3, 2 < y < 4)$ .

**Розв'язок.** Сталу величину  $a$  визначають з умови (2.75):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \int_2^4 a dx dy = 1 &\Rightarrow a \int_{-1}^3 dx \cdot \int_2^4 dy = 1 \Rightarrow a \cdot x(3 - (-1)) \cdot y(4 - 2) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \cdot 4 \cdot 2 = 1 \Rightarrow 8a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Із знайденим значенням  $a$  двовимірна густина розподілу  $f(x, y)$  має вигляд:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q. \end{cases}$$

Функцію розподілу  $F(x, y)$  описаної задачі двовимірної випадкової величини знаходимо за формулою (2.61). Розглянемо випадки:

а)  $x \leq -1$  або  $y \leq 2 \Rightarrow$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0;$$

б)  $-1 < x \leq 3, 2 < y \leq 4 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^x \int_2^y \frac{1}{8} d\xi d\eta = \frac{1}{8} \int_{-1}^x d\xi \cdot \int_2^y d\eta = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (x - (-1)) \cdot (y - 2) = \frac{1}{8} (x + 1)(y - 2); \end{aligned}$$

в)  $-1 < x \leq 3, y > 4 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^x \int_2^4 \frac{1}{8} d\xi d\eta = \frac{1}{8} \int_{-1}^x d\xi \cdot \int_2^4 d\eta = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (x - (-1)) \cdot (4 - 2) = \frac{1}{4} (x + 1); \end{aligned}$$

г)  $x > 3, 2 < y \leq 4 \Rightarrow$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^3 \int_2^y \frac{1}{8} d\xi d\eta = \frac{1}{8} \int_{-1}^3 d\xi \cdot \int_2^y d\eta = \\ = \frac{1}{8} \cdot (3 - (-1)) \cdot (y - 2) = \frac{1}{2} (y - 2);$$

д)  $x > 3, y > 4 \Rightarrow$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^3 \int_2^4 \frac{1}{8} d\xi d\eta = \frac{1}{8} \int_{-1}^3 d\xi \cdot \int_2^4 d\eta = \\ = \frac{1}{8} \cdot (3 - (-1)) \cdot (4 - 2) = 1.$$

Отже функція  $F(x, y)$  записується так:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \text{ або } y \leq 2; \\ \frac{1}{4}(x+1), & -1 < x \leq 3, y > 4; \\ \frac{1}{8}(x+1)(y-2), & -1 < x \leq 3, 2 < y \leq 4; \\ \frac{(y-2)}{2}, & x > 3, 2 < y \leq 4; \\ 1, & x > 3, y > 4. \end{cases}$$

Імовірність, яку шукають, обчислюють за формулою (2.78):

$$P(0 < x < 1, 2 < y < 5) = \int_0^1 \int_2^5 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_2^4 \frac{1}{8} dx dy + \int_0^1 \int_4^5 0 dx dy = \\ = \frac{1}{8} \cdot (1 - 0) \cdot (4 - 2) = \frac{1}{4}.$$

Оскільки функція розподілу  $F(x, y)$  відома, то цю ймовірність можна також обчислити за формулою (2.72).

## 2.9.1. Залежні і незалежні випадкові величини.

### Умовні закони розподілу

У попередньому розділі було показано, що, знаючи закон розподілу системи двох (дискретних або неперервних) випадкових величин, можна знайти закон розподілу окремих величин  $x$  та  $y$ , які входять у систему  $F(x, y)$ .

Виникає питання: а чи не можна, знаючи закони розподілу окремих випадкових величин  $x$  та  $y$ , знайти їхній сумісний закон розподілу?

Це можна зробити лише в одному частковому випадку, коли випадкові величини  $x$  та  $y$ , що утворюють систему, є *незалежними*.

Згадаємо, що дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, якого значення набула інша.

Іншими словами, дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо для будь-яких дійсних чисел  $x$  і  $y$  ймовірність сумісної появи двох подій  $X < x$  і  $Y < y$  дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$p(X < x \cap Y < y) = p(X < x) \cdot p(Y < y) \quad (2.81)$$

або

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \quad (2.82)$$

Якщо функція розподілу  $F(x, y)$  не може бути подана як добуток  $F_1(x) \cdot F_2(y)$ , то величини  $x$  та  $y$ , є *залежними*.

Необхідна й достатня умова *незалежності* двох дискретних випадкових величин  $x$  і  $y$  виражається системою нерівностей:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j), \quad i = 1 \dots n, j = 1 \dots m. \quad (2.83)$$

Для неперервних випадкових величин необхідна й достатня умова незалежності  $x$  і  $y$  виражається також через густину розподілу:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y). \quad (2.84)$$

Наприклад, у прикладі 2.11 дискретні випадкові величини  $x$  і  $y$  – незалежні, оскільки для ймовірностей  $p(x_i, y_j)$ ,  $p(x_i)$ ,  $p(y_j)$  виконується рівність:

$$p(x_i, y_j) = p(x = x_i) \cdot p(y = y_j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Аналогічний висновок можна зробити щодо неперервних випадкових величин із прикладу 2.13. Тут двовимірна випадкова величина  $(x, y)$  задана густиною розподілу:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q. \end{cases}$$

де  $Q = \{(x, y) : -1 < x < 3, 2 < y < 4\}$ .

За допомогою формул (2.79 і 2.80) знаходимо густини розподілів  $f_1(x)$ ,  $f_2(y)$ :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{1}{8} \cdot \int_2^4 dy = \frac{1}{4}; & x \in (-1; 3); \\ 0, & x \notin (-1; 3). \end{cases}$$

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{1}{8} \cdot \int_{-1}^3 dx = \frac{1}{2}; & x \in (2; 4); \\ 0, & x \notin (2; 4). \end{cases}$$

Тоді з рівності  $f(x, y) = 1/8 = 1/4 \cdot 1/2 = f_1(x) \cdot f_2(y)$  маємо, що  $x$  і  $y$  – незалежні.

**Приклад 2.14.** Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини  $(x, y)$  задано таблицею:

$x \backslash y$	10	20	30	40	$p(y_j)$
-8	0,01	0,03	0,02	0,04	0,1
-4	0,07	0,1	0,07	0,06	0,3
-2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,6
$p(x_i)$	0,18	0,33	0,19	0,3	

З'ясувати, чи будуть випадкові величини  $x$  і  $y$  – незалежні.

**Розв'язок.** У внутрішніх клітинах таблиці містяться ймовірності  $p(x_i, y_j)$ , які визначають сумісний розподіл двох випадкових величин  $x$  і  $y$ , а останній рядок і останній стовпчик характеризують одновимірні розподіли компоненти  $x$  і  $y$ , відповідно.

У цій таблиці  $p(x_1, y_1) = 0,01$ ;  $p(x_1) = 0,18$ ;  $p(y_1) = 0,1$ , тому  $p(x_i, y_j) \neq p(x_i) \cdot p(y_j)$  і випадкові величини  $x$  і  $y$  – залежні.

**Приклад 2.15.** Двовимірною неперервною випадковою величиною  $(x, y)$  задана густиною розподілу:

$$f(x, y) = \begin{cases} a \cdot (x + y), & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q, \end{cases}$$

де  $Q = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ . Визначити число  $a$ , густини розподілів одновимірних компонент  $x$  і  $y$  та перевірити на залежність випадкові величини  $x$  і  $y$ .

*Розв'язок.* Значення величини  $a$  знаходимо з умови нормування:

$$\int_0^1 \int_0^1 a \cdot (x+y) dx dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy = 1 \Rightarrow a \cdot \left( \int_0^1 \int_0^1 x dx dy + \int_0^1 \int_0^1 y dx dy \right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \left( \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 dy + \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 y dy \right) = 1 \Rightarrow a \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1 \Rightarrow a = 1.$$

Отже, випадкова величина  $(x, y)$  має густину розподілу ймовірностей:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y), & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q. \end{cases}$$

За формулами (2.79 і 2.80) знаходимо густини розподілів  $f_1(x)$  і  $f_2(y)$ :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 (x+y) dy; & x \in (0, 1); \\ 0; & x \notin (0, 1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1; & x \in (0, 1); \\ 0; & x \notin (0, 1) \end{cases} = \begin{cases} x + \frac{1}{2}; & x \in (0, 1); \\ 0; & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 (x+y) dx; & y \in (0, 1); \\ 0; & y \notin (0, 1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \left( xy + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1; & y \in (0, 1); \\ 0; & y \notin (0, 1) \end{cases} = \begin{cases} y + \frac{1}{2}; & y \in (0, 1); \\ 0; & y \notin (0, 1). \end{cases}$$

Оскільки  $f(x, y) = x + y \neq \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right) = f_1(x) \cdot f_2(y)$  при  $(x, y) \in Q$  то випадкові величини  $x$  і  $y$  – залежні.

Якщо випадкові величини, які утворюють систему, залежні, то для знаходження їхнього сумісного розподілу недостатньо знати закони розподілу складових, а потрібно ще знати умовний закон розподілу однієї з них. Це питання тісно пов'язане з поняттям імовірності подій  $A$  за умови, що відбулася подія  $B$ , тобто з **умовною ймовірністю події  $A$** , яка виражається формулою:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)},$$

де  $p(B) > 0$ .

У випадку *дискретної величини*, нехай  $(x_i, y_j)$  – можливі значення дискретної двовимірної випадкової величини  $(x, y)$ ,  $i = 1 \dots n$ ,  $j = 1 \dots m$ . Через  $p(x_i | y_j)$  позначимо умовну ймовірність того, що випадкова величина  $x$  набуде значення  $x_i$  за умови, що випадкова величина  $y$  набула значення  $y_j$ , а через  $p(y_j | x_i)$  – умовну ймовірність того, що випадкова величина  $y$  набуде значення  $y_j$  за умови, що випадкова величина  $x$  набула значення  $x_i$ .

Ймовірності  $p(x_i | y_j)$  і  $p(y_j | x_i)$  обчислюємо за формулами:

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad (2.85)$$

$$p(y_j | x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \quad (2.86)$$

які впливають із формули для обчислення умовної ймовірності подій.

*Умовним законом* розподілу складової  $x$  випадкової величини  $(x, y)$  за фіксованого значення складової  $y = y_j$  називається перелік усіх можливих значень  $x_i$  випадкової величини  $x$  та

умовних імовірностей  $p(x_i|y_j)$ , що відповідають значенням випадкової величини.

Умовним законом розподілу складової у двовимірної дискретної випадкової величини  $(x,y)$  за фіксованого значення складової  $x = x_i$  називається перелік усіх можливих значень  $y_j$  випадкової величини  $y$  та відповідних умовних імовірностей  $p(y_j|x_i)$ .

Умовні закони розподілення складових  $x, y$  двовимірної дискретної випадкової величини  $(x,y)$  записують, відповідно, у формі таких таблиць:

$x = x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$\sum_{i=1}^n p(y_i x_j) = 1$
$p(x_i y_j)$	$p(x_1 y_1)$	$p(x_2 y_2)$	...	$p(x_n y_n)$	
$y = y_j$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$	$\sum_{i=1}^n p(y_j x_i) = 1$
$p(y_j x_i)$	$p(y_1 x_1)$	$p(y_2 x_2)$	...	$p(y_n x_n)$	

Отже можна зробити висновок: знаючи безумовні закони розподілу складових  $x$  і  $y$  та умовний закон розподілу однієї з них, можемо скласти закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини  $(x,y)$  і ймовірності  $p(x_i, y_j)$  можливих їхніх значень  $(x_i, y_j)$  обчислюємо за формулами:

$$p(x_i, y_j) = p(y_j) \cdot p(x_i|y_j),$$

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j|x_i).$$

Приклад 2.16. Закон розподілу двовимірної випадкової величини  $(x,y)$  задано таблицею:

$x \backslash y$	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>40</b>	$p(y)$
-8	0,01	0,03	0,02	0,04	0,1
-4	0,07	0,1	0,07	0,06	0,3
-2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,6
$p(x)$	0,18	0,33	0,19	0,3	

Записувати умовні закони розподілу  $X|Y = -4$  і  $Y|X = 40$ .



*Розв'язок.* Записуємо закон розподілу випадкової величини  $x$  за фіксованого значення  $y = -4$ . Для цього обчислимо умовні ймовірності:

$$p(x_1|y_2) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,07}{0,3}, \quad p(x_2|y_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,1}{0,3},$$

$$p(x_3|y_2) = \frac{p(x_3, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,07}{0,3}, \quad p(x_4|y_2) = \frac{p(x_4, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,06}{0,3}.$$

Умовний закон розподілу  $X|Y = -4$ :

$x = x_i$	10	20	30	40
$p(x_i y_2)$	$\frac{0,07}{0,3}$	$\frac{0,1}{0,3}$	$\frac{0,07}{0,3}$	$\frac{0,06}{0,3}$

Зробимо перевірку:

$$\sum_{i=1}^4 p(x_i|y_2) = \frac{0,07}{0,3} + \frac{0,1}{0,3} + \frac{0,07}{0,3} + \frac{0,06}{0,3} = 1.$$

Запишемо закон розподілу випадкової величини  $y$  за фіксованого значення  $x = 40$ . Для цього обчислимо ймовірності:

$$p(y_1|x_4) = \frac{p(y_1, x_4)}{p(x_4)} = \frac{0,04}{0,3},$$

$$p(y_2|x_4) = \frac{p(y_2, x_4)}{p(x_4)} = \frac{0,06}{0,3},$$

$$p(y_3|x_4) = \frac{p(y_3, x_4)}{p(x_4)} = \frac{0,2}{0,3}.$$

Умовний закон розподілу  $y|x = 40$ :

$y = y_i$	-8	-4	-2
$p(y_j x_4)$	$\frac{0,04}{0,3}$	$\frac{0,06}{0,3}$	$\frac{0,2}{0,3}$

Перевірка: 
$$\sum_{j=1}^3 p(y_j|x_4) = \frac{0,04}{0,3} + \frac{0,06}{0,3} + \frac{0,2}{0,3} = 1.$$

Розглянемо варіант *неперервної випадкової величини*. Нехай  $(x, y)$  – двовимірна неперервна випадкова величина і  $f(x, y)$  – густина її сумісного розподілу. Закони розподілу складових  $x$  і  $y$  визначаються рівняннями 2.79 і 2.80:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

**Умовною густиною**  $\phi(x|y)$  розподілу ймовірностей складової  $x$  двовимірної неперервної величини  $(x, y)$  за фіксованого значення  $y$  називається частка від густини  $f(x, y)$  її сумісного розподілу й густини  $f_2(y)$  складової  $y$ :

$$\phi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \quad f_2(y) \neq 0. \quad (2.87)$$

**Умовною густиною**  $\psi(y|x)$  розподілу ймовірностей складової  $y$  двовимірної неперервної величини  $(x, y)$  за фіксованого значення  $x$  називається частка від густини  $f(x, y)$  її сумісного розподілу і густини  $f_1(x)$  складової  $x$ :

$$\psi(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}, \quad f_1(x) \neq 0. \quad (2.88)$$

Умовна густина розподілу ймовірностей складової двовимірної неперервної випадкової величини визначає її *умовний закон розподілу*.

Отже, напрашується висновок: *знаючи густини розподілів складових  $x$  і  $y$  та її умовну густину розподілу однієї з них, можемо обчислити густину розподілу двовимірної неперервної величини  $(x, y)$  за формулами:*

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot \phi(x|y), \quad f(x, y) = f_1(x) \cdot \psi(y|x).$$

**Приклад 2.17.** Знайти умовні густини розподілу  $\phi(x|y)$  і  $\psi(y|x)$  для залежних неперервних випадкових величин  $x$  і  $y$ , які описано у прикладі 2.15.

**Розв'язок.** За допомогою формул (2.87) і (2.88) та виразів  $f(x, y)$ ,  $f_2(y)$ ,  $f_1(x)$ , отриманих у ході розв'язку прикладу 2.15, знаходимо:

$$\phi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}, & x \in (0;1); \\ 0, & x \notin (0;1), \end{cases}$$

де  $y \in (0;1)$  – фіксоване.

$$\psi(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}, & y \in (0;1); \\ 0, & y \notin (0;1), \end{cases}$$

де  $x \in (0;1)$  – фіксоване.

Робимо перевірку:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x|y) dx &= \int_0^1 \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{y+\frac{1}{2}} \int_0^1 (x+y) dx = \frac{1}{y+\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dx \right) = \\ &= \frac{1}{y+\frac{1}{2}} \left( \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + y \cdot x \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{y+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} + y \right) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y|x) dy &= \int_0^1 \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} y = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 x dy + \int_0^1 y dy \right) = \\ &= \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \left( x \cdot y \Big|_0^1 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \left( x + \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Повернемося до питання про залежність і незалежність випадкових величин. Нагадаємо, що дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, якого можливого значення набула друга величина. У загальному випадку незалежність складових  $x$  і  $y$  двовимірної випадкової величини  $(x,y)$  рівносильна виконанню рівності (2.82), а критерії незалежності окремо для дискретного й неперервного випадків визначаються співвідношеннями (2.83) і (2.84). Звідки випливає, що коли величини  $x$  і  $y$  незалежні та неперервні, то їхні умовні густини розподілів  $\phi(x|y)$  і  $\psi(y|x)$  збігаються з "безумовними" густинами розподілів  $f_1(x)$  і  $f_2(y)$ :

$$\begin{aligned} \phi(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f_1(x) \cdot f_2(y)}{f_2(y)} = f_1(x), \\ \psi(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) \cdot f_2(y)}{f_1(x)} = f_2(y). \end{aligned}$$

Очевидно, подібний висновок про рівність відповідних умовних і безумовних розподілів двох незалежних випадкових величин можна зробити і для дискретного випадку.

Варто зауважити, що поняття *залежності випадкових величин* не можна змішувати з *поняттям функціональної залежності*. У разі існування функціональної залежності між величинами  $x$  і  $y$  у кожному значенню  $x$  за певним законом відповідає одне й лише одне значення  $y$ . Якщо ж ми маємо справу із *залежними випадковими величинами*, то в загальному випадку, знаючи значення однієї, можна тільки вказати *закон розподілу* другої. Така залежність називається *ймовірнісною* (або *стохастичною*).

Отже, залежність між випадковими величинами може бути більш або менш тісна: від повної її відсутності через різні ступені ймовірнісної залежності аж до строгої, функціональної залежності, коли, знаючи значення однієї випадкової величини, можна точно вказати значення другої.

## 2.9.2. Чисельні характеристики двовимірних випадкових величин

Чисельні характеристики складових  $x$  і  $y$  двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  визначають за формулами, які є аналогами для одновимірної випадкової величини. Специфічні властивості деяких чисельних характеристик двовимірної випадкової величини пов'язані із залежністю її компонент.

У випадку *дискретної випадкової величини* основні чисельні характеристики  $(x, y)$  виражаються формулами:

- *математичне сподівання*:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \cdot p(x_i, y_j), \quad (2.89)$$

$$M(y) = \sum_{j=1}^m y_j \cdot p(y_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_j \cdot p(x_i, y_j); \quad (2.90)$$

- *дисперсії*:

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{i=1}^n [x_i - M(x)]^2 \cdot p(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_i - M(x)]^2 \cdot p(x_i, y_j), \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$D(y) = \sum_{j=1}^m [y_j - M(y)]^2 \cdot p(y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [y_j - M(y)]^2 \cdot p(x_i, y_j)$$
(2.92)

або

$$D(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p(x_i) - [M(x)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^2 \cdot p(x_i, y_j) - [M(x)]^2,$$
(2.93)

$$D(y) = \sum_{j=1}^m y_j^2 \cdot p(y_j) - [M(y)]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_j^2 \cdot p(x_i, y_j) - [M(y)]^2.$$
(2.94)

- середні квадратичні відхилення:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sigma_x, \quad (2.95)$$

$$\sigma(y) = \sqrt{D(y)} = \sigma_y. \quad (2.96)$$

**Приклад 2.18.** Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини  $(x, y)$  задано таблицею:

$x_i \backslash y_j$	-2	4	6
3	1,7a	2,2a	2,1a
5	0,3a	1,8a	1,9a

Визначити число  $a$  й обчислити чисельні характеристики  $M(x)$ ,  $D(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $M(y)$ ,  $D(y)$ ,  $\sigma(y)$ .

*Розв'язок.* З умовою нормування можна визначити параметр  $a$ :  
 $1,7a + 2,2a + 2,1a + 0,3a + 1,8a + 1,9a = 1 \Rightarrow 10a = 1 \Rightarrow a = 0,1$ .

Із знайденим числом  $a$  і доповненими ймовірностями  $p(x_i)$  і  $p(y_j)$  таблиця набуває такого вигляду:

$x_i \backslash y_j$	-2	4	6	$p(y_j)$
3	0,17	0,22	0,21	0,6
5	0,03	0,18	0,19	0,4
$p(x_i)$	0,2	0,4	0,4	

За формулами (2.89)–(2.96) розрахуємо чисельні характеристики:

$$M(x) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p(x_i) = (-2) \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,4 = \\ = -0,4 + 1,6 + 2,4 = 3,6;$$

$$M(x^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p(x_i) = (-2)^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,4 + 6^2 \cdot 0,4 = \\ = 0,8 + 6,4 + 14,4 = 21,6;$$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x) = 21,6 - 3,6^2 = 21,6 - 12,96 = 8,64;$$

$$\sigma(x) = \sigma_x = \sqrt{8,64} \cong 2,94.$$

$$M(y) = \sum_{j=1}^2 y_j p(y_j) = 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,4 = 1,8 + 2 = 3,8;$$

$$M(y^2) = \sum_{j=1}^2 y_j^2 p(y_j) = 3^2 \cdot 0,6 + 5^2 \cdot 0,4 = 5,4 + 10 = 15,4;$$

$$D(y) = M(y^2) - M^2(y) = 15,4 - 3,8^2 = 15,4 - 14,44 = 0,96;$$

$$\sigma(y) = \sigma_y = \sqrt{0,96} \approx 0,98.$$

У випадку двовимірної *неперервної випадкової величини*  $(x, y)$  основні чисельні характеристики виражаються формулами:

- *Математичні сподівання:*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy, \quad (2.97)$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) dx dy, \quad (2.98)$$

де  $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$  – густина розподілу складової  $x$ , а

$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$  – густина розподілу складової  $y$ .

Нагадаємо, що інтеграл за змінною  $y$  обчислюється за умови, що  $x$  – стала величина, а інтеграл за змінною  $x$  – за умови, що  $y$  – стала величина.

- Дисперсії:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 \cdot f_1(x) dx = \quad (2.99)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 \cdot f(x, y) dx dy,$$

$$D(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M(y)]^2 \cdot f_2(y) dy = \quad (2.100)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M(y)]^2 \cdot f(x, y) dx dy,$$

або

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_1(x) dx - [M(x)]^2 = \quad (2.101)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x, y) dx dy - [M(x)]^2,$$

$$D(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_1(y) dy - [M(y)]^2 = \quad (2.102)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f(x, y) dx dy - [M(y)]^2.$$

- Середньо квадратичні відхилення розраховуються за рівняннями (2.95) і (2.96).

Якщо всі значення двовимірної неперервної випадкової величини містяться в прямокутнику  $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$ , то в усіх

наведених вище формулах  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots$  замінюємо на  $\int_a^b \int_c^d \dots$ .

**Приклад 2.19.** Двовимірна неперервна випадкова величина  $(x, y)$  задана густиною:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

де  $\Omega = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ .

Обчислити чисельні характеристики  $M(x)$ ,  $D(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $M(y)$ ,  $D(y)$ ,  $\sigma(y)$ .

*Розв'язок.* Чисельні характеристики обчислюємо за формулами (2.97)–(2.102):

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_0^1 \int_0^1 x \cdot (x + y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + xy) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 dx dy + \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y dx dy = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 dy + \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot y \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(Y) &= \int_0^1 \int_0^1 y \cdot (x + y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (xy + y^2) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y dx dy + \int_0^1 \int_0^1 y^2 dx dy = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy + \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 y^2 dy = \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 \cdot (x + y) dx dy - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \int_0^1 x^3 dx \cdot \int_0^1 dy + \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 y dy - \frac{49}{144} = \\ &= \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \cdot y \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{49}{144} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(Y) &= \int_0^1 \int_0^1 y^2 \cdot (x + y) dx dy - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \\ &= \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 y^3 dy - \frac{49}{144} = \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{49}{144} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}; \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{\frac{11}{144}} = \frac{\sqrt{11}}{12}; \quad \sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{\frac{11}{144}} = \frac{\sqrt{11}}{12}.$$



## Питання для самостійного повторення

*Замість крапок запишіть таке продовження тексту, щоб отримати правильне означення або твердження. Де можливо запишіть відповідну формулу.*

1. Величина називається випадковою, якщо...
2. Дискретною називають випадкову величину, для якої...
3. Випадкова величина називається одновимірною, якщо...
4. Випадкова величина називається  $n$ -вимірною, якщо...
5. Умовою нормування випадкової величини називається...
6. Законом розподілення дискретної випадкової величини називається...
7. Закон розподілу дискретної випадкової величини називається біноміальним, якщо...
8. Формула, що виражає закон розподілу Пуассона, записується як...
9. Неперервною випадковою називають величину, яка...
10. Закон розподілу випадкової величини називається геометричним, якщо...
11. Густиною розподілу неперервної випадкової величини називають...
12. Функцією розподілу випадкової величини називають...
13. Властивості густини розподілу...
14. Властивості функції розподілу...
15. Для неперервного рівномірного розподілу густина дорівнює...
16. Імовірність попадання неперервної рівномірно розподіленої випадкової величини на відрізок  $a < x < \beta$  дорівнює...
17. Стандартна форма нормального розподілення має густину розподілу...
18. Центрована форма нормального розподілення має густину розподілу...
19. Нормальне розподілення в загальному вигляді має густину...
20. До чисельних характеристик випадкових величин відносять...
21. Математичним сподіванням називається...
22. Дисперсією називається...
23. Математичне сподівання дискретної випадкової величини визначається як...
24. Властивості математичного сподівання:...
25. Математичне сподівання одиничного досліду з відомою ймовірністю появи події дорівнює...

26. Для біноміального закону розрахунок математичного сподівання проводять за спрощеною формулою...
27. Математичне сподівання випадкової величини, яка підкоряється розподіленню Пуассона дорівнює...
28. Математичне сподівання для неперервної рівномірно розподіленої величини дорівнює...
29. Зв'язок дисперсії з другим початковим моментом виражається рівнянням...
30. Властивості дисперсії:...
31. Для біноміального закону розрахунок дисперсії проводять за спрощеною формулою...
32. Дисперсію для неперервної рівномірно розподіленої випадкової величини розраховують за формулою...
33. Середньо квадратичне відхилення – це...
34. Функція Лапласа використовується для...
35. Імовірність знаходження неперервної випадкової величини  $x$ , що підкоряється нормальному закону, на відрізку  $(m - l; m + l)$ , який розташований симетрично відносно математичного сподівання  $m$ , дорівнює...
36. Центральну граничну теорему можна сформулювати так...
37. Формулювання локальної теореми Лапласа:...
38. Двовимірною називають випадкову величину, для якої...
39. Законом розподілу ймовірностей двовимірної дискретної випадкової величини називається...
40. Функцією розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  називається...
41. Густиною розподілу ймовірностей  $f(x, y)$  двовимірної неперервної випадкової величини  $(x, y)$  називають...
42. Для неперервних випадкових величин необхідна і достатня умова незалежності  $x$  і  $y$  виражається...
43. Умовною густиною  $\phi(x|y)$  розподілу ймовірностей складової  $x$  двовимірної неперервної величини  $(x, y)$  за фіксованого значення  $y$  називається...
44. Умовною густиною  $\psi(y|x)$  розподілу ймовірностей складової  $y$  двовимірної неперервної величини  $(x, y)$  за фіксованого значення  $x$  називається...
45. Чисельні характеристики дискретної двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  виражаються формулами:...
46. Чисельні характеристики неперервної двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  виражаються формулами:...

## Задачі для самостійного розв'язку

1. У грошовій лотереї випущено 1000 квитків. Розігрують один вигравш у 1000 грн, чотири – по 500 грн, п'ять – по 400 грн, десять – по 200 грн. Знайти закон розподілення вартості виграшу для володаря одного лотерейного квитка (у вигляді таблиці).

2. Монету підкидають чотири рази. Записати закон розподілу ймовірностей випадкових величин  $X$  – числа появи герба.

3. Знайти математичне сподівання випадкової величини  $X$ , якщо відомий закон її розподілення:

$X$	3	5	2
$P$	0,1	0,6	0,3

4. Знайти математичне сподівання числа появи події  $A$  в одному досліді, якщо ймовірність появи  $A$  дорівнює  $P$ .

5. Виконується три постріли з ймовірністю влучення в мішень  $p_1 = 0,4$ ;  $p_2 = 0,3$ ;  $p_3 = 0,6$ . Знайти математичне сподівання загального числа влучань.

6. Знайти математичне сподівання суми числа очок, яка може з'явитися при киданні двох гральних кісток.

7. Незалежні випадкові величини  $X$  та  $Y$  задані таким законом розподілення:

$x$	5	2	4
$p$	0,6	0,1	0,3

$y$	7	9
$p$	0,8	0,2

Знайти математичне сподівання випадкової величини  $X \cdot Y$ .

8. Знайти дисперсію випадкової величини  $X$ , яка задана таким законом розподілу:

$X$	1	2	5
$p$	0,3	0,5	0,2

9. Знайти дисперсію випадкової величини  $X$ , яка задана таким законом розподілу:

$X$	2	3	5
$p$	0,1	0,6	0,3

10. Знайти дисперсію і середньоквадратичне відхилення дискретної випадкової величини  $X$ , яка задана таким законом розподілу:

$X$	-5	2	3	4
$p$	0,4	0,3	0,1	0,2

11. Дискретна випадкова величина  $X$  має лише два можливі значення  $x_1$  та  $x_2$ , причому рівноймовірно. Довести, що дисперсія величини  $x$  дорівнює квадрату напіврізниці можливих значень:

$$D(x) = \left[ \frac{x_2 - x_1}{2} \right]^2.$$

12. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини  $X$  – числа появи події  $A$  у п'яти незалежних дослідах, якщо ймовірність появи події  $A$  в кожному досліді дорівнює 0,2.

13. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини  $X$  – числа появи події  $A$  у двох незалежних дослідах, якщо ймовірність появи події в цих дослідах однакова та відомо, що математичне сподівання  $M[x] = 1,2$ .

14. Дискретна випадкова величина  $X$  має лише два можливі значення:  $X_1$  та  $X_2$ , причому  $X_1 < X_2$ . Ймовірність того, що  $X$  набуде значення  $X_1$ , дорівнює 0,6. Знайти закон розподілення величини  $X$ , якщо математичне сподівання та дисперсія відомі:  $M[x] = 1,4$ ;  $D[X] = 0,24$ .

15. Підкинуто  $n$  гральних кубиків. Знайти дисперсію суми числа очок, які з'являться на всіх кубиках, що випали.

16. Ймовірність того, що стрілець влучить у мішень з одного пострілу дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах стрілець влучить у мішень:

а) не менш ніж 71 раз і не більше за 80 раз;

б) не менше за 81 раз.

17. Знайти ймовірність того, що під час складання заліку з 100 студентів не складуть його не менше ніж 10 і не більше за 30, якщо ймовірність отримання заліку складає 0,8.

18. Знайти ймовірність того, що під час складання заліку з 112 студентів складуть його не менше ніж 93, якщо ймовірність не отримати залік складає 0,1.

19. Прилад складається з чотирьох елементів і ймовірність наявності технічних неполадок у кожному з них становить 0,5. Написати закон розподілу випадкової величини  $X$  – числа елементів приладу, у яких наявні технічні неполадки. Визначити ймовірність того, що число елементів приладу, у яких наявні технічні неполадки, буде більшим ніж два. Знайти математичне сподівання ( $m$ ) і дисперсію ( $D$ ) для даного закону розподілу, а також найімовірніше число елементів із технічними неполадками.

20. Статистика свідчить, що 20 % сімей мають кабельне телебачення. Навмання вибирають три сім'ї. Написати закон розподілу випадкової величини  $X$  – числа сімей, які мають кабельне телебачення, із трьох навмання вибраних. Обчисліть ймовірність події  $A$  – не

більше, ніж одна сім'я із трьох навмання вибраних, має кабельне телебачення. Знайти математичне сподівання ( $m$ ) і дисперсію ( $D$ ) для цього розподілення.

21. У лікарню за медичною допомогою звернулося 5 пацієнтів. Повне одужання від їхньої хвороби спостерігається у 60 % усіх хворих. Знайти а) закон розподілу випадкової величини  $X$  – кількості пацієнтів, що повністю одужали; б) імовірність того, що повністю одужали не менше трьох пацієнтів; в) математичне сподівання ( $m$ ) і дисперсію ( $D$ ) для цього розподілення.

22. У ящику є 6 конусних і 15 циліндричних деталей. Навмання дістають 3 деталі. Написати закон розподілу випадкової величини  $X$  – кількості циліндричних деталей серед трьох виїнятих. Знайти найімовірніше число циліндричних деталей серед трьох навмання виїнятих, а також розрахувати математичне сподівання ( $m$ ) і дисперсію ( $D$ ) для цього розподілення.

23. Розподіл імовірностей неперервної випадкової величини  $X$  задано густиною:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 & \dots \dots \dots 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \dots \dots \dots x \notin [0; 2] \end{cases}.$$

Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

24. Випадкова величина  $x$  має рівномірний закон розподілу на проміжку  $(0; a)$ . Відомо також, що  $P\left(x \geq \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ . Знайти  $a$  і  $M(x^2)$ .

25. Випадкова величина  $X$  має рівномірний розподіл із математичним сподіванням  $M(x) = 3$  і дисперсією  $D(x) = \frac{4}{3}$ . Визначити проміжок  $X$ , у якому визначений цей закон розподілу й записати густину розподілу.

26. Неперервна випадкова величина  $X$  розподілена за нормальним законом із параметрами  $M(x) = 4$  і  $\sigma = 1,5$ . Виконати такі дії: 1) записати густину розподілу  $f(x)$ ; 2) обчислити ймовірність  $P(-2 \leq X \leq 7)$  і  $P(|X - 4| \leq 3)$ .

27. Зріст дорослого чоловіка описується нормальним законом розподілу. За статистикою середній зріст (математичне сподівання) становить 175 см, а середньоквадратичне відхилення дорівнює 7 см. Знайти ймовірність того, що зріст навмання взятого чоловіка відрізнятиметься від середнього зросту не більше ніж на 7 см.

28. Дано дві дискретні випадкові величини  $X$  і  $Y$

$X = x_i$	-1	0	
$P(x_i)$	0,1	0,9	
$Y = y_j$	0	2	4
$P(y_j)$	0,2	0,4	0,4

Побудувати закон розподілу двовимірної випадкової величини  $(X; Y)$ , якщо відомо, що величини  $X$  і  $Y$  є незалежними.

29. Два стрільці незалежно один від другого зробили по 2 постріли в одну й ту саму мішень. Імовірність влучання для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого – 0,6. Нехай  $X$  – число влучань першого стрільця,  $Y$  – другого. Знайти: а) сумісний розподіл  $X$  і  $Y$ ; б) закони розподілу  $X$  і  $Y$ ; в) закон розподілу  $Y$  за умови, що  $X = 1$ ; г) імовірність події  $\{X = 1, Y > 0\}$ . Чи залежні  $X$  і  $Y$ ?

30. Двовимірну випадкову величину  $(X, Y)$  задано густиною розподілу ймовірностей:

$$f(x, y) = \begin{cases} a \cos \pi x \cdot \cos \pi y; & \dots\dots\dots 0 \leq x \leq 0,5; 0 \leq y \leq 0,5; \\ 0; & \dots\dots\dots \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

Знайти сталу  $a$  і умовні закони розподілу складових.

31. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею

$y_j / x_i$	-1	0	$x_3$	3
-2	0,04	$a$	0,03	0,04
0	0,05	0,12	0,02	0,12
$y_3$	0,02	0,2	0,04	0,1
7	$a$	0,03	0,05	0,14

Знайти: 1) параметр  $a$ ; 2)  $x_3$  та  $y_3$ , якщо  $M(X) = 1,37$ , а  $M(Y) = 2,4$ .

32. Незалежні випадкові величини  $X$  і  $Y$  задані густинами ймовірностей:  $f(x) = \begin{cases} 0, & \dots\dots x \leq 0; \\ 2e^{-2x}, & \dots\dots x > 0; \end{cases}$   $f(y) = \begin{cases} 0, & \dots\dots y \leq 0; \\ 4e^{-4y}, & \dots\dots y > 0. \end{cases}$

Знайти  $f(x, y)$  і  $F(x, y)$ .

33. Двовимірною випадковою величиною  $(X, Y)$  має щільність розподілу

$$f(x, y) = a \cdot x \cdot y$$

в області  $D$  і  $f(x, y) = 0$  поза областю. Область  $D$  – трикутник, обмежений прямими  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Знайти: 1) параметр  $a$ ; 2)  $M(X)$  і  $M(Y)$ ; 3)  $D(X)$  і  $D(Y)$ .

## Відповіді до задач розділу 2

3.  $M[X] = 3,9$ ; 4.  $M[X] = P$ ; 5.  $M[X] = 1,3$ ; 6.  $M[X] = 7$ ; 7.  $M[XY] = 32,56$ ;  
8.  $D[X] = 2,01$ ; 9.  $D[X] = 1,05$ ; 10.  $D[X] = 15,21$ ;  $\sigma = 3,9$ ; 12.  $D[X] = 0,8$ ;  
13.  $D[X] = 0,48$ ; 14.  $X_1 = 1, X_2 = 2$ ; 15.  $D[X] = 2,917n$ ; 16.  $P_{100}(71,80) = 0,6961$ ;  
 $P_{100}(81,100) = 0,0838$ ; 17.  $p = 0,988$ ; 18.  $p = 0,99$ ; 19.  $k_0 = 2$ ;  $M[X] = 2$ ;  
 $D[X] = 1$ ; 20.  $M[X] = 0,6$ ;  $D[X] = 0,48$ ; 21.  $P(X) = 0,6826$ ;  $M[X] = 3$ ;  $D[X] = 1,2$ ;  
22.  $M[X] = 2,143$ ;  $D[X] = 0,55$ ; 23.  $M(X) = 1$ ;  $\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; 24.  $a = \frac{1}{2}$ ;  
 $M(X^2) = \frac{1}{12}$ ; 25.  $n = 18$ ;  $p = 2/3$ ;  $P_4(2) = 0,296$ ; 26.  $P(-2 \leq X \leq 7) = 0,9772$ ;  
 $P(|X - 4| \leq 3) = 0,96$ ; 27.  $P(|X - M(X)| \leq 7) = 0,678$ ; 30.  $a = \pi^2$ ;  
 $\varphi(x|y) = \pi \cdot \cos \pi x$ ;  $\psi(y|x) = \pi \cdot \cos \pi y$ ; 31.  $a = 0$ ;  $x_3 = 2$ ;  $y_3 = 3$ ;  
33.  $a = 24$ ;  $M(X) = M(Y) = 2/5$ ;  $D(X) = D(Y) = 0,04$ .

## РОЗДІЛ 3

### Теорія помилок

#### 3.1. Оцінки числових характеристик. Рівноточні вимірювання

Уявимо, що в досліді ми вимірюємо деяку величину  $A$ . Якщо на цю величину можуть діяти випадкові фактори, то це призведе до накладання випадкових похибок –  $\Delta x$ . Зазвичай кількість різних випадкових факторів, що впливають на величину, що досліджується, досить велике й діють вони незалежно один від одного. А це, у свою чергу, відповідає умові прояву центральної граничної теореми і, відповідно, закон розподілу випадкової похибки  $\Delta x$  має бути нормальним. Випадкова похибка  $\Delta x$  накладається на точне значення величини  $A$  і перетворює цю величину на неперервну випадкову –  $X$ , закон розподілу якої, як і для  $\Delta x$ , буде нормальним.

Нормальний закон, як відомо, описується двома параметрами: математичним сподіванням та дисперсією. У теорії помилок математичне сподівання відповідає точному, не спотвореному дією випадкових факторів значенню вимірів деякої величини, а дисперсія визначає розсіяння експериментальних даних навколо їхнього точного значення.

У попередніх розділах зазначалося, що для знаходження закону розподілення потрібно мати у своєму розпорядженні достатньо великий статистичний матеріал. Проте на практиці часто доводиться мати справу зі статистичним матеріалом обмеженого об'єму – одним-двома десятками спостережень, часто навіть менше. Це звичайно пов'язано зі складністю постановки кожного досліді. Такого обмеженого матеріалу явно недостатньо для того, щоб знайти наперед невідомий закон розподілення випадкової величини, але цей матеріал може оброблятися та використовуватися для отримання деяких відомостей про випадкову величину. Наприклад, на основі обмеженого статистичного матеріалу можна



визначити хоч б орієнтовно найважливіші числові характеристики випадкової величини: математичне сподівання та дисперсію.

Насамперед потрібно зазначити, що будь-який параметр, обчислений на основі обмеженого числа дослідів, завжди містить елемент випадковості. Таке наближене значення назвемо *оцінкою* параметра. Наприклад, *оцінкою математичного сподівання* (за рівноточних вимірювань) є *середнє арифметичне значення випадкової величини* в  $n$  незалежних дослідах. У багатьох дослідах середнє арифметичне з великою ймовірністю наближається до математичного сподівання. Якщо ж кількість дослідів невелика, то заміна математичного сподівання середнім арифметичним призводить до помилки. Ця помилка тим більша, чим менша кількість дослідів. Так само й з оцінками інших параметрів. Будь-яка з таких оцінок є випадковою і за умови користування нею неминучі помилки. Бажано обрати таку оцінку, щоб ці помилки були мінімальними.

Розглянемо таку загальну задачу. Є випадкова величина  $X_i$ , закон розподілення якої містить невідомий параметр  $a$ . Потрібно знайти відповідну оцінку для параметра  $a$  за результатами  $n$  незалежних дослідів, у кожному з яких величина  $X$  набула певного значення:  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Ці значення можна розглядати як  $n$  незалежних значень випадкової величини  $X$ , кожне з яких розподілене за тим самим законом, що і випадкова величина  $X$ .

Позначимо через  $\tilde{a}$  оцінку для параметра  $a$ . Будь-яка оцінка, що обчислюється, повинна бути функцією величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :  $\tilde{a} = \tilde{a}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , і, отже, сама є величиною випадковою. Закон розподілення  $\tilde{a}$  залежить, по-перше, від закону розподілення величини  $X$  (і, зокрема, від самого невідомого параметра  $a$ ); по-друге, від кількості дослідів. Цей закон розподілення можна знайти методами теорії ймовірностей.

Пред'явимо до оцінки  $\tilde{a}$  ряд вимог, яким вона має задовольняти, щоб бути "якісною" оцінкою. Природно вимагати від оцінки  $\tilde{a}$ , щоб при збільшенні кількості дослідів  $n$  вона наближалася (сходилася за ймовірністю) до параметра  $a$ . Оцінка, що володіє такою властивістю, називається *обгрунтованою*. Крім того, бажано, щоб при користуванні величиною  $\tilde{a}$  замість  $a$ , принаймні,

не робилося систематичної помилки в бік завищення, чи заниження, тобто виконувалася б умова:  $M[\tilde{a}] = a$ . Оцінка, що має таку властивість називається *незміщеною*. Також бажано, щоб незміщена оцінка мала найменшу дисперсію:  $D[\tilde{a}] = \min$ . Оцінка з такою властивістю називається *ефективною*. Отже, до будь-якої оцінки  $\tilde{a}$  висуваються такі вимоги:

- обґрунтованості ( $\tilde{a} \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ );
- незміщеності ( $M[\tilde{a}] = a$ );
- ефективності ( $D[\tilde{a}] = \min$ ).

Оцінкою для математичного сподівання (за рівноточних вимірювань) є *середнє арифметичне значення випадкової величини*:

$$\tilde{m}_x = \bar{x} = m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}. \quad (3.1)$$

Оцінка  $\tilde{m}_x$  є незміщеною, тому що:

$$M[\tilde{m}_x] = M[\bar{x}] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{\sum_{i=1}^n M[x_i]}{n} = \frac{n \cdot m_x}{n} = m_x.$$

Дисперсія цієї оцінки дорівнює:

$$D[\tilde{m}_x] = D[\bar{x}] = D\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{\sum_{i=1}^n D[x_i]}{n^2} = \frac{nD_x}{n^2} = \frac{D_x}{n};$$

$$D[\bar{x}] = \frac{D_x}{n}. \quad (3.3)$$

Тобто дисперсія середнього арифметичного в  $n$  разів менша за дисперсію величини  $X$ , що вимірюють. Із формули (3.3) бачимо, що ефективність оцінки зростає зі збільшенням кількості дослідів

$n$  і при  $n \rightarrow \infty$   $D[\bar{x}] = \frac{D_x}{n} \rightarrow 0$ , тобто  $\tilde{m}_x$  стає за цих умов менш

випадковою величиною, а отже обґрунтованою оцінкою. Для середнього арифметичного вимога обґрунтованості виражається **законом великих чисел (теорема Чебишева)**: зі збільшенням  $n$  величина  $\tilde{m}_x$  збігається за ймовірністю із  $m_x$ .

Як оцінку для дисперсії випадкової величини розглянемо її статистичний аналог:

$$D_x^* = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 \cdot p_i^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (3.4)$$

при  $n \rightarrow \infty$   $m_x^* \rightarrow m_x$ ;  $p_i^* \rightarrow p_i$  і  $D_x^* \rightarrow D_x$ .

Ці міркування показують, що  $D_x^*$  обґрунтована оцінка для  $D_x$ .

Дисперсія  $D_x^*$  дорівнює:

$$D[D_x^*] = \frac{2}{n} D_x^2, \quad (3.5)$$

тобто як і у випадку із оцінкою  $\tilde{m}_x$  ефективність оцінки дисперсії зростає зі збільшенням кількості дослідів. Введемо також статистичний аналог для початкового моменту:

$$\alpha_2^*[x] = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}. \quad (3.6)$$

Між  $D_x^*$  та  $\alpha_2^*$  існує такий же самий зв'язок, що і між  $D_x$  та  $\alpha_2[x]$ , а саме:

$$\alpha_2^*[x] = D_x^* + (m_x^*)^2. \quad (3.7)$$

Перевіримо  $D_x^*$  на незміщеність:

$$\begin{aligned}
 M[D_x^*] &= M\left\{\alpha_2[x] - (m_x^*)^2\right\} = \\
 &= M\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}\right] - M\left[(m_x^*)^2\right] = \frac{1}{n}M\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right] - \alpha_2[m_x^*] = \\
 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M[x_i^2] - \left\{D[m_x^*] + (M[m_x^*])^2\right\} = \frac{n\alpha_2[x]}{n} - \left[\frac{D_x}{n} + m_x^2\right] = \\
 &= \alpha_2[x] - m_x^2 - \frac{D_x}{n} = D_x - \frac{D_x}{n} = D_x \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Отже, оцінка  $D_x^*$  виявилась зміщеною. Незміщеною вона стане при множенні на  $\left(\frac{n}{n-1}\right)$ , тому правильною оцінкою для дисперсії є величина:

$$\tilde{D}_x = D_x^* \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \tag{3.9}$$

Оцінка для середньоквадратичного відхилення випадкової величини  $X$ :

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\tilde{D}_x} \tag{3.10}$$

називається **середньоквадратичною помилкою** вимірної величини  $X$ . З урахуванням (3.3) середньоквадратична помилка середнього арифметичного в  $\sqrt{n}$  разів менша середньоквадратичної помилки вимірної величини  $X$ , тобто:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}. \tag{3.11}$$

*Приклад 3.1.* Знайти значення  $\tilde{m}_x$ ,  $\tilde{\sigma}_x$ ,  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  для 10 рівноточних вимірювань.

Таблиця 3.1

	$(x'_i)^2$	$x'_i = x_i - 21$	$x_i$	$x_i - \tilde{m}_x$	$(x_i - \tilde{m}_x)^2$
	0,00	0,00	21,00	- 0,20	0,04
	0,04	0,20	21,20	0,00	0,00
	0,16	0,40	21,40	+ 0,20	0,04
	0,09	0,30	21,30	+ 0,10	0,01
	0,25	0,50	21,50	+ 0,30	0,09
	0,00	0,00	21,00	- 0,20	0,04
	0,01	- 0,10	20,90	- 0,30	0,09
	0,36	0,60	21,60	+ 0,40	0,16
	0,04	- 0,20	20,80	- 0,40	0,16
	0,09	0,30	21,30	+ 0,10	0,01
$\Sigma$	1,04	2,00	212,00	0,00	0,64

Розв'язок.

I спосіб (права частина табл. 3.1).

$$\tilde{m}_x = \bar{x} = \frac{212,0}{10} = 21,2; \quad \tilde{D}_x = \frac{0,64}{10-1} = 0,071;$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{0,071} = 0,266; \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = \frac{0,266}{\sqrt{10}} = 0,084.$$

II спосіб (ліва частина табл. 3.1).

$$\tilde{m}'_x = \bar{x}' = \frac{2,0}{10} = 0,2; \quad \tilde{m}_x = \tilde{m}'_x + 21,0 = 21,2; \quad \alpha_2' [x] = \frac{1,04}{10} = 0,104;$$

$$\tilde{D}_x = \left\{ \tilde{\alpha}_2' [x] - (\tilde{m}'_x)^2 \right\} \cdot \frac{n}{n-1} = (0,104 - 0,040) \cdot \frac{10}{9} = 0,071.$$

Під час розрахунків  $\tilde{D}_x$  через  $\alpha_2^* [x]$  зручно перенести початок координат у точку, що розташована ближче до математичного сподівання. У протилежному випадку необхідно розраховувати оцінку дисперсії як різницю двох великих величин ( $\alpha_2^* [x]$  та  $(\tilde{m}_x)^2$ ).

## 3.2. Пошук грубих помилок

Іноді в серії вимірювань з'являються одна чи декілька точок, які різко відрізняються від всього масиву вимірювань. Для того, щоб відкинути точку, чи, навпаки, включити її до масиву значень необхідно мати який-небудь критерій. Цей критерій має назву "**правило трьох сигм**" і стверджує, що точку, яка розташовується за межами відрізка  $\tilde{m}_x \pm 3\tilde{\sigma}_x$ , необхідно вважати грубою помилкою, тобто цю точку необхідно відкинути. Обґрунтуванням правила трьох сигм є нескладний розрахунок:

$$P(|x - \tilde{m}_x| < 3\tilde{\sigma}_x) = \Phi\left(\frac{3\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_x\sqrt{2}}\right) = \Phi(2,12).$$

За допомогою табл. 2 (додатку) знаходимо значення функції Лапласа  $\Phi(2,12) = 0,997$ . Отже, імовірність виходу точки за межі відрізка  $(\tilde{m}_x \pm 3\tilde{\sigma}_x)$  дорівнює  $1,000 - 0,997 = 0,003$ , тобто близька до нуля. Це свідчить про те, що подію "вихід точки за межі цього відрізка" можна вважати практично неможливою.

Для наведеного вище прикладу (3.1) значення  $3\tilde{\sigma}_x = 0,798$ , а максимальне значення відхилення випадкової величини від математичного сподівання  $|x_i - \tilde{m}_x| = 0,4$ , тобто міститься всередині відрізка  $3\tilde{\sigma}_x$  і, значить, грубих помилок серед наведених даних немає.

Під час користування правилом трьох сигм завжди виникає питання: чи потрібно точку, яку підозрюють як грубу помилку, включати і масив при розрахунку числових характеристик  $(\tilde{m}_x, \tilde{D}_x, \tilde{\sigma}_x)$  і потім перевіряти її відповідність масиву за допомогою правила трьох сигм. Чи треба відразу виключити цю точку ( $j$ ) з масиву даних і, якщо з'ясується, що  $|x_j - \tilde{m}_x| < 3\tilde{\sigma}_x$ , то включити її в масив даних. На перший погляд обидва підходи ("презумпція невинності" точки та "презумпція її винності") еквівалентні. Не поспішатиме з висновками й розглянемо такий приклад.

*Приклад 3.2.* Маємо  $(n - 1)$  точку при вимірюванні. Нехай розсіяння цих точок таке мале (порівняно з грубою помилкою), що

ним можна знехтувати та вважати, що всі  $(n - 1)$  точка влучили "одна в одну" та мають координату  $x_i = a$ . А одна точка випала з масиву даних і має координату  $a + b$ . Знайдемо середнє арифметичне по усім точкам.

$$\bar{x} = \frac{(n-1) \cdot a + (a+b)}{n} = \frac{n \cdot a - a + a + b}{n} = \frac{n \cdot a + b}{n} = a + \frac{b}{n}.$$

Розрахуємо значення дисперсії для рівноточних вимірювань.

$$\begin{aligned} \overline{D_x} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\left(a - a - \frac{b}{n}\right)^2 \cdot (n-1) + \left(a + b - a - \frac{b}{n}\right)^2 \cdot 1}{n-1} = \\ &= \frac{\frac{b^2}{n^2} \cdot (n-1) + b^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}{n-1} = \frac{b^2 \cdot (n-1) + (n-1)^2}{n^2 \cdot (n-1)} = \\ &= \frac{b^2}{n^2} \cdot (1 + n - 1) = \frac{b^2}{n}. \end{aligned}$$

Тоді проміжок  $3\bar{\sigma}_x$  дорівнюватиме:

$$3\bar{\sigma}_x = \frac{3b}{\sqrt{n}}.$$

Відхилення випадкової величини від середнього арифметичного  $\bar{x}$ :

$$\Delta = (a + b) - \left(a + \frac{b}{n}\right) = b - \frac{b}{n} = b \cdot \frac{n-1}{n};$$

Знайдемо відношення  $\Delta$  до  $3\bar{\sigma}_x$ :

$$\frac{\Delta}{3\bar{\sigma}_x} = \frac{b \cdot \frac{n-1}{n}}{\frac{3b}{\sqrt{n}}} = \frac{n-1}{3\sqrt{n}}.$$

Неважко зрозуміти, що отримане співвідношення  $\frac{\Delta}{3\bar{\sigma}_x}$  при  $n < 10$  менше за одиницю за будь-яких значень  $b$ , тобто якщо застосувати правило трьох сигм у варіанті "включення" підозрілої точки, то воно може не спрацювати навіть за умови дуже великих

відхилень. Це відбувається тому, що у варіанті "включення" ця точка дає вирішальний вклад у суму  $\left(x_i - \bar{x}\right)$ , що різко збільшує дисперсію  $\tilde{D}_x$  за відносно невеликої кількості вимірів і "розтягує" інтервал  $3\tilde{\sigma}_x$  (тобто точка ніби сама себе "вносить" у цей інтервал).

У наведеному вище прикладі 3.1 можна "підозрювати" відразу дві точки, для яких  $x_i - \tilde{m}_x = 0,4$ . Якщо їх виключити з масиву даних, то дисперсія та, відповідно,  $\tilde{\sigma}_x$  зменшуються ( $\tilde{D}_x = 0,046$ ;  $\tilde{\sigma}_x = 0,214$ ), але і при такому підході  $|x_j - \tilde{m}_x| < 3\tilde{\sigma}_x = 0,65$ , тобто ці точки не є грубими помилками і їх необхідно повернути до масиву даних.

За дуже малої кількості вимірювань ( $n \cong 3-4$ ) використовувати правило трьох сигм не рекомендується. Справді, нехай із трьох точок дві (перша та друга) близько розташовані одна до одної, а третя розташована далеко від них. Відкидаючи третю точку як грубу помилку, ми зміщуємо  $\tilde{m}_x$  у бік перших двох точок. Можливо, однак, що друга точка випадково з'явилась біля першої, а повинна була б з'явитися біля третьої. У цьому випадку треба було б викинути першу точку. І перший варіант, і другий (відкидання першої, чи третьої точки) неправильні, тому що значення  $\tilde{m}_x$  у кожному випадку залежить від положення лише однієї (другої) точки.

Після перевірки відкидають грубу помилку (якщо така є) і будують довірчий інтервал.

### 3.3. Довірчий інтервал

У попередній главі було розглянуте питання про оцінку невідомого параметра  $a$  одним числом. Така оцінка називається "точковою". Проте в ряді завдань потрібно не лише знайти для параметра  $a$  відповідне чисельне значення, але й оцінити його точність і надійність. Потрібно знати, до яких помилок може призвести заміна параметра  $a$  його точковою оцінкою  $\tilde{a}$  і з якою впевненістю можна чекати, що ці помилки не вийдуть за



визначені межі? Такі завдання особливо актуальні за малої кількості спостережень, коли точкова оцінка  $\tilde{a}$  значною мірою випадкова й наближена заміна  $a$  на  $\tilde{a}$  може призвести до серйозних помилок. Щоб дати уявлення про точність і надійність оцінки  $\tilde{a}$  у математичній статистиці користуються так званими **довірчим інтервалом** і **довірчою ймовірністю**.

Якщо для параметра  $a$  одержана з дослідів незміщена оцінка  $\tilde{a}$ , то треба оцінити можливу при цьому помилку. Візьмемо деяку достатньо велику ймовірність  $\beta$  (наприклад,  $\beta = 0,90$ ;  $0,95$  чи  $0,99$ ) – таку, що подію із ймовірністю  $\beta$  можна вважати практично достовірною, і знайдемо таке значення  $\varepsilon$ , для якого:

$$P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta. \quad (3.12)$$

Тоді діапазон практично можливих значень помилки, що виникає при заміні  $a$  на  $\tilde{a}$ , дорівнюватиме  $\pm \varepsilon$ . Великі за абсолютною величиною помилки з'являються тільки з малою ймовірністю ( $\alpha = 1 - \beta$ ). Перепишемо (3.12) у вигляді:

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta. \quad (3.13)$$

Рівність (3.13) означає, що з ймовірністю  $\beta$  невідоме значення параметра  $a$  потрапляє в інтервал  $l_\beta$ :

$$l_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon; \tilde{a} + \varepsilon). \quad (3.14)$$

Водночас необхідно відзначити одну обставину. Раніше неодноразово розглядалася ймовірність потрапляння випадкової величини в заданий не випадковий інтервал. Тут ідеться про інше – величина " $a$ " *невипадкова*, проте випадковим є інтервал  $l_\beta$  і його положення на осі абсцис. Випадкова взагалі й довжина інтервалу  $2\varepsilon$ , оскільки величина  $\varepsilon$  обчислюється, зазвичай, за експериментальними даними. Тому в цьому випадку краще тлумачити величину  $\beta$  не як ймовірність "влучення" точки " $a$ " в інтервал  $l_\beta$ , а як ймовірність того, що випадковий інтервал  $l_\beta$  накріє точку " $a$ " (рис. 3.1).

Ймовірність  $\beta$  прийнято називати **довірчою ймовірністю**, а інтервал  $l_\beta$  – **довірчим інтервалом**. Межі інтервалу  $l_\beta$ :  $a_1 = \tilde{a} - \varepsilon$  і  $a_2 = \tilde{a} + \varepsilon$  називаються **довірчими межами**.

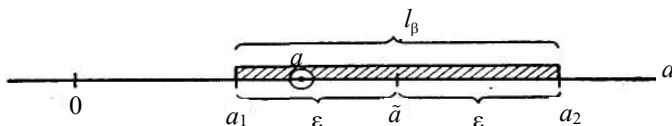


Рис. 3.1. Ілюстрація довірчого інтервалу  $l_\beta$

Можна дати ще одне тлумачення поняттю довірчого інтервалу: його можна розглядати як інтервал значень параметра  $a$ , що сумісні з дослідними даними й такі, що не суперечать їм. Справді, якщо вважати подію із ймовірністю  $(\alpha = 1 - \beta)$  практично неможливою, то ті значення параметра  $a$ , для яких  $|\tilde{a} - a| > \varepsilon$ , потрібно визнати такими, що суперечать дослідним даним, а ті, для яких  $|\tilde{a} - a| < \varepsilon$  – сумісними з ними.

Будь-який довірчий інтервал знаходиться з умови, що виражає ймовірність виконання деяких нерівностей, у які входить оцінка  $\tilde{a}$ . Закон розподілення оцінки  $\tilde{a}$  у загальному випадку залежить від самих невідомих параметрів величини  $X$ . Проте іноді вдається перейти в нерівностях від випадкової величини  $\tilde{a}$  до іншої функції значень  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , закон розподілення яких не залежить від невідомих параметрів, а залежить лише від числа дослідів  $n$  і від виду закону розподілу величини  $X$ . Такі випадкові величини відіграють важливу роль у математичній статистиці; вони найдетальніше вивчені для випадку нормального розподілу величини  $X$ . Наприклад, доведено, що при нормальному розподілі величини  $X$  випадкова величина:

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\tilde{\sigma}_x}, \quad (3.15)$$

підкоряється так званому *закону розподілу Стьюдента* із  $(n - 1)$  ступенями свободи, який має вигляд:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)n} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad (3.16)$$

де  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$  – так звана гамма-функція.

Покажемо, як розподілення (3.16) можна застосувати під час побудови довірчого інтервалу для параметра  $\bar{x}$ , що для рівноточних вимірювань виконує роль математичного сподівання  $\tilde{m}_x$ . Природно цей інтервал узяти симетричним відносно  $\bar{x}$ . Позначимо через  $\varepsilon_\beta$  половину довжини інтервалу. Величину  $\varepsilon_\beta$  потрібно вибрати так, щоб виконувалася умова (3.12), яка в цьому випадку має вигляд:

$$P(|\bar{x} - m| < \varepsilon_\beta) = \beta. \quad (3.17)$$

Перейдемо в лівій частині рівності (3.17) від випадкової величини  $\bar{x}$  до випадкової величини  $t$ , розподіленої за законом Стюдента. Для цього поділимо обидві частини нерівності на величину  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  і врахуємо (3.15):

$$P\left(\frac{|\bar{x} - m|}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}} < \frac{\varepsilon_\beta}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}}\right) = P(t < t_\beta) = \beta. \quad (3.18)$$

Величина  $t_\beta = \frac{\varepsilon_\beta}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}}$  розраховується з умови:

$$P(t < t_\beta) = \int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n-1}(t) dt = \beta. \quad (3.19)$$

Із формули (3.16) бачимо, що  $S_{n-1}(t)$  – парна функція, тому співвідношення (3.19) дає:

$$2 \int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t) dt = \beta \quad (3.20)$$

Рівності (3.19) і (3.20) визначають величину  $t_\beta$  через  $\beta$ . Якщо мати у своєму розпорядженні таблицю значень інтеграла

$\Phi(t) = 2 \int_0^t S_{n-1}(t) dt$ , то величину  $t_\beta$  можна знайти зворотною інтегральною функцією. Проте зручніше скласти наперед таблицю значень  $t_\beta$ , як функцію від  $\beta$ . Така таблиця дається в додатку (табл. 4).

У цій таблиці наведені значення  $t_\beta$  залежно від довірчої

ймовірності  $\beta$  і числа ступенів свободи  $(n-1)$ . Визначивши  $t_\beta$  за таблицею додатку і, вважаючи, що:

$$\varepsilon_\beta = t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}}, \quad (3.21),$$

можна знайти довірчий інтервал:

$$l_\beta = \left( \bar{x} - t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}}; \bar{x} + t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}} \right). \quad (3.22)$$

Величині  $t_\beta$  можна надати просту інтерпретацію – це напівширина довірчого інтервалу, що виражається середньоквадратичною похибкою середнього арифметичного.

*Приклад 3.3.* Проведено серію вимірювань опору розчину оцтової кислоти за 22 °С. Розраховані значення константи дисоціації  $K_{\text{оцс}}$ . Побудувати довірчий інтервал, якщо довірча ймовірність 0,95.

$n$	$K_{\text{оцс}} \cdot 10^5$
1	1,57
2	1,65
3	1,79
4	2,01
5	1,91
6	2,02
7	2,10
8	2,15
9	1,90

*Розв'язок.* Маємо:

$$\tilde{m}_K = \bar{K}_{\text{оцс}} = \frac{\sum_{i=1}^9 K_i}{n} = \frac{17,12 \cdot 10^{-5}}{9} = 1,902 \cdot 10^{-5};$$

$$\tilde{D}_K = \frac{\sum_{i=1}^9 (K_i - \bar{K}_{\text{оцс}})^2}{n-1} = \frac{0,3138 \cdot 10^{-10}}{8} = 0,039 \cdot 10^{-10};$$

$$\tilde{\sigma}_K = \sqrt{\tilde{D}_K} = 0,198 \cdot 10^{-5};$$

$$\tilde{\sigma}_{\bar{K}} = \frac{\tilde{\sigma}_K}{\sqrt{n}} = \frac{0,198 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{9}} = 0,063 \cdot 10^{-5}.$$

За табл. 4 додатку для  $(n-1)=8$  і  $\beta=0,95$  знаходимо  $t_\beta = 2,31$ , звідки

$$\varepsilon_\beta = t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{K}} = 0,063 \cdot 10^{-5} \cdot 2,31 = 0,14 \cdot 10^{-5},$$

$$\bar{K} = (1,90 \pm 0,14) \cdot 10^{-5}.$$

Довірчий інтервал можна також записати, вказавши нижню і верхню межу довірчого інтервалу  $l_\beta = (1,76; 2,04) \cdot 10^{-5}$ .

Теоретична відповідь на питання, скільки потрібно проводити вимірювань, однозначна – чим більше, тим краще. Насправді ж, довірчий інтервал визначається  $\varepsilon_\beta = t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ , тож потрібно проаналізувати як змінюватимуться  $t_\beta$  і  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  зі збільшенням  $n$ . Середньоквадратична похибка середнього арифметичного  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  зі збільшенням  $n$  зменшується за рівнянням (3.11):  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}$ , пара-

метр  $t_\beta$  також зменшується зі зростанням  $n$  при фіксованому значенні довірчої ймовірності (табл. 4). На практиці маємо таке. Збільшення  $n$ , скажімо, з 2 до 8 вимірювань досить ефективно звужує довірчий інтервал:  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  при цьому зменшується вдвічі, а  $t_\beta$  приблизно в чотири рази, тобто довірчий інтервал стискається майже на порядок. Чергове його скорочення дається важче, а саме, параметр  $t_\beta$  за подальшого зростання  $n$  залишається майже незмінним, а для скорочення  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  ще вдвічі необхідно збільшити кількість вимірювань із 8 до 32. Залежність  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}$  вимагає суттєвого зростання  $n$  для подальшого скорочення довірчого інтервалу. Тому реальна кількість вимірювань, за якого досягається досить ефективно скорочення довірчого інтервалу складає 15–20 дослідів.

Проведений аналіз необхідної кількості вимірювань справедливий, якщо задачу розглядати з позиції випадкової похибки. Проте для визначення оптимальної кількості вимірювань необхідно розуміти співвідношення між випадковою похибкою і систематичною.

### 3.4. Оцінювання систематичної похибки

Величина  $\varepsilon$  – абсолютна похибка, завжди має позитивні значення. Для *безпосередніх* вимірів вона визначається чутливістю цього методу, приладу тощо. Наприклад, якщо проводиться титрування (вольоетричний метод аналізу в аналітичній хімії), то точка переходу визначається з точністю до 1–2 крапель, тобто  $\varepsilon_V \approx 0,05$  мл. Для настінного термометра, який вимірює температуру навколишнього повітря, звичайно  $\varepsilon_T \approx 1^\circ$ ; у термометра для вимірювання температури людського тіла  $\varepsilon_T \approx 0,1^\circ$ ; а термометр Бекмана може вимірювати температуру з точністю до  $\varepsilon_T \approx 0,005^\circ$ . Аналогічно визначається похибка у всіх безпосередніх вимірюваннях.

Крім абсолютної похибки часто використовують відносну похибку ( $\delta$ ):

$$\delta_a = \frac{\varepsilon_a}{|a|}, \quad (3.23)$$

де  $|a|$  – абсолютне (за модулем) значення вимірюваної величини.  $\delta_a$  – також завжди позитивна величина.

Наприклад, якщо для титрування використовується колба ємністю  $V = 50$  мл, то

$$\delta_V = \frac{\varepsilon_V}{|V|} = \frac{0,05}{50} = 0,001 = 0,1\%.$$

Існує просте правило для оцінювання величини  $\delta$ , а саме, якщо  $S$  – це число значущих (достовірних) цифр у величині, що визначається, то  $\delta \approx 10^{-S}$ . Наприклад, у прикладі, що було наведено,  $V = 50,00 \pm 0,05$ , четверта цифра вже ненадійна, значить,  $S = 3$ , а  $\delta_V \approx 10^{-3} = 0,001$  у повній відповідності з отриманим вище результатом.

Очевидно, що за  $S = 0$  відносна похибка  $\delta = 1$  (100%), тобто похибка дорівнює самій величині, що вимірювалась, і не можна довіряти жодній цифрі.

На практиці часто доводиться мати справу з *опосередкованими* вимірюваннями, тобто необхідно оцінити похибку ( $\varepsilon_u$ )

деякої величини  $u$ , яка зв'язана функціонально залежністю:  $u = f(x)$  з безпосередньо вимірюваною величиною  $x$ . Водночас вважається, що похибка аргументу ( $\varepsilon_x$ ) вже відома.

Запишемо  $x = a + \varepsilon_x$ , де  $a$  – точне значення величини  $x$ , та будемо вважати, що  $\varepsilon_a \ll a$  (це еквівалентно припущенню, що  $\delta \ll 1$ ).

Розкладемо величину  $u$  в ряд Тейлора:

$$u = f(x) = f(a + \varepsilon_x) = f(a) + \frac{f'(a)\varepsilon_x}{1!} + \frac{f''(a)\varepsilon_x^2}{2!} + \dots \quad (3.24)$$

Оскільки  $\varepsilon_x$  за умовою мала величина, то при розкладі у ряд Тейлора можна знехтувати доданками із членами  $\varepsilon_x^2, \varepsilon_x^3$  тощо.

Тоді:

$$\varepsilon_u = f(a + \varepsilon_x) - f(a) = f'(x)\varepsilon_x \quad (3.25)$$

Проілюструємо формулу (3.25) такими прикладами.

*Приклад 3.4.* Знайти похибку логарифмічної функції.

*Розв'язок.* Нехай  $u = \ln x$ ,  $f'(u) = \frac{1}{x}$  і відповідно до (3.25)

можна записати:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{x} \cdot \varepsilon_x = \delta_x.$$

Отже, для логарифмічної функції абсолютна похибка функції дорівнює відносній похибці аргументу.

*Приклад 3.5.* Знайти відносну похибку ( $\delta_k$ ) для визначення константи швидкості хімічної реакції за рівнянням Арреніуса

$$k = k_0 e^{-E/RT}.$$

*Розв'язок.* За рівнянням Арреніуса константа швидкості залежить від температури (величина, що безпосередньо вимірюється), тоді:

$$\begin{aligned} \delta k = \frac{\varepsilon_k}{|k|} &= \frac{f'(k) \cdot \varepsilon_T}{|k|} = \frac{k_0 \cdot e^{-E/RT} \cdot \left(-\frac{E}{R}\right) \cdot \left(-\frac{1}{T^2}\right) \cdot \varepsilon_T}{k_0 \cdot e^{-E/RT}} = \\ &= \frac{E}{R \cdot T^2} \cdot \varepsilon_T = \frac{E}{R \cdot T} \cdot \frac{\varepsilon_T}{T} = \frac{E}{R \cdot T} \cdot \delta_T. \end{aligned}$$

Проілюструємо отриманий результат численними прикладами.

**А.** Для високотемпературних вимірів  $T \approx 700$  К;  $E = 170$  кДж/моль;  $R = 8,31$  Дж/моль К,  $\varepsilon_T = 2$  К.

$$\delta_T = \frac{2}{700} \cong 0,003 \cong 0,3\%,$$

$$\delta_k = \frac{170000}{8,31 \cdot 700} \cdot 0,3\% = 8,8\%.$$

Незважаючи на відносно невелику похибку у вимірі температури ( $\delta_T < 1\%$ ), похибка у визначенні константи швидкості стає досить великою (всього одна *значуща* цифра!)

**Б.** За температур, близьких до кімнатних ( $T \approx 300$  К), дослідження звичайно проводять в ультратермостатах, які дозволяють більш точно фіксувати температуру:  $\varepsilon_T = 0,02$  К. Енергія активації для таких реакцій (у розчинах) звичайно нижча, ніж для високотемпературних процесів і дорівнює  $E = 80$  кДж/моль.

$$\delta_T = \frac{0,02}{300} \cong 0,00007 \cong 0,007\%,$$

$$\delta_k = \frac{80000}{8,31 \cdot 300} \cdot 0,007\% = 0,22\%.$$

У цьому випадку з'являється можливість розрахувати константу швидкості хімічної реакції вже з точністю до трьох значущих цифр.

Розглянемо як визначити похибку для функції з декількома змінними. Для ілюстрації обмежимося випадком двох незалежних аргументів, тобто  $u = f(x, y)$ . Замість повної похідної, що використовувалася в рівнянні (3.25), тепер треба використовувати частинні похідні, тобто:

$$\varepsilon_u = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_y \varepsilon_x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_x \varepsilon_y. \quad (3.26)$$

Неважко побачити, що рівняння (3.26) можна узагальнити для будь-якого числа змінних.

Використовуючи рівняння (3.26) для визначення похибки добутку двох величин знаходимо:

$$u = x \cdot y; \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_y = y; \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_x = x;$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_u &= y \cdot \varepsilon_x + x \cdot \varepsilon_y; \\ \delta_u &= \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{y \cdot \varepsilon_x + x \cdot \varepsilon_y}{x \cdot y} = \frac{\varepsilon_x}{x} + \frac{\varepsilon_y}{y} = \delta_x + \delta_y; \\ \delta_u &= \sum \delta_i.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Аналогічну формулу отримуємо і для частки.

$$\begin{aligned}u &= \frac{x}{y}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{y}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right); \\ \varepsilon_u &= \frac{1}{y} \cdot \varepsilon_x + \frac{x}{y^2} \cdot \varepsilon_y; \\ \delta_u &= \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{\frac{1}{y} \cdot \varepsilon_x + \frac{x}{y^2} \cdot \varepsilon_y}{x/y} = \frac{\varepsilon_x}{x} + \frac{\varepsilon_y}{y} = \delta_x + \delta_y.\end{aligned}$$

За умови знаходження абсолютної та відносної похибок складної функції потрібно враховувати ту обставину, що ні абсолютна, ні відносна похибки не можуть бути від'ємними величинами, отже значення похідних беруть завжди зі знаком "+", тобто по модулю.

Якщо всі множники однакові, то з рівняння (3.27) слідує, що:

$$\delta_u = n \cdot \delta_i.$$

Тобто для ступеневої залежності  $u = x^n$

$$\delta_u = n \cdot \delta_x. \quad (3.28)$$

Цей результат можна отримати й за допомогою формули (3.25), тобто:

$$\begin{aligned}\varepsilon_u &= \frac{du}{dx} \cdot \varepsilon_x = \frac{dx^n}{dx} \cdot \varepsilon_x = n \cdot x^{n-1} \cdot \varepsilon_x; \\ \delta_u &= \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \varepsilon_x}{x^n} = n \cdot \frac{\varepsilon_x}{x} = n \cdot \delta_x.\end{aligned}$$

Отже, якщо функція представлена добутком або часткою декількох аргументів, то відносна похибка функції дорівнюватиме сумі відносних похибок усіх аргументів.

*Приклад 3.6.* Знайти абсолютну похибку у визначенні прискорення вільного падіння ( $g$ ), якщо відомо, що  $g$  може

розраховуватися із формули:  $g = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{\tau^2}$ , де  $l$  – довжина маятника;  $\tau$  – період його коливань.

*Розв'язок.*

$$\begin{aligned} l &= 50,02 \text{ см}; & \varepsilon_l &= 0,01 \text{ см}; & \delta_l &= 0,02 \% ; \\ \tau &= 0,7098 \text{ с}; & \varepsilon_\tau &= 0,0001 \text{ с}; & \delta_\tau &= 0,0143 \% ; \\ \pi &= 3,1416; & \varepsilon_\pi &= 0,00005; & \delta_\pi &= 0,0017 \% ; \end{aligned}$$

$$\delta_g = 2\delta_\pi + \delta_l + 2\delta_\tau = 0,052\%;$$

$$\varepsilon_g = \delta_g \cdot g = 0,00052 \cdot 981,07 = 0,51 \text{ см} / \text{с}^2;$$

$$g = 981 \pm 0,51 \text{ см} / \text{с}^2.$$

Для суми двох величин  $u = x + y$  з рівняння (3.26) маємо:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = 1;$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y; \quad (3.29)$$

$$\varepsilon_u = \sum \varepsilon_i. \quad (3.30)$$

Відносна похибка суми при цьому менша суми відносних похибок аргументу:

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{x + y} = \frac{\varepsilon_x}{x + y} + \frac{\varepsilon_y}{x + y} \leq \frac{\varepsilon_x}{x} + \frac{\varepsilon_y}{y} = \delta_x + \delta_y.$$

Для різниці  $u = x - y$  абсолютна похибка знаходиться також як і для суми за формулою (3.29), тобто додаються абсолютні похибки аргументів.

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y,$$

але що стосується відносної похибки, то потрібно звернути увагу на певні нюанси:

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{x - y} = \frac{\varepsilon_x}{x - y} + \frac{\varepsilon_y}{x - y}. \quad (3.31)$$

Формула (3.31) показує, що при  $x \rightarrow y$  відносна похибка прямуватиме до нескінченності  $\delta_u \rightarrow \infty$ .

Отже, при визначенні різниці двох близьких величин різко підвищується похибка, і тому необхідно підвищувати кількість

значущих цифр у  $x$ , що зменшується, і в  $y$ , що віднімається. Іншими словами різко підвищуються вимоги до точності обох аргументів  $x$  та  $y$ .

Якщо цю ситуацію описати образно (різниця двох великих близьких за значенням величин), то можна порівняти це із визначенням ваги капітана пароплава шляхом послідовного зважування пароплава спочатку з капітаном, а потім без нього.

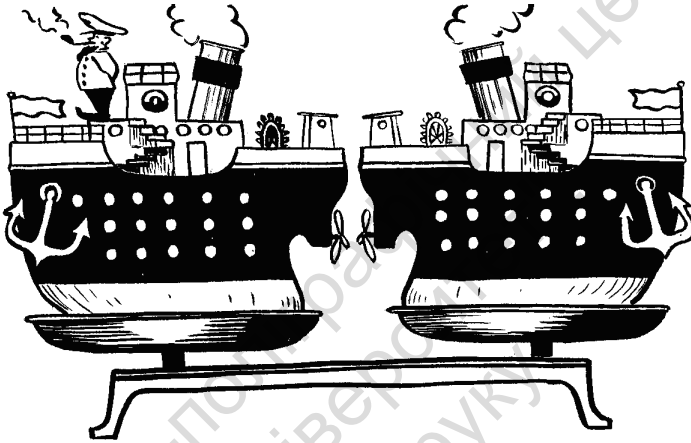


Рис. 3.2. Зважування капітана

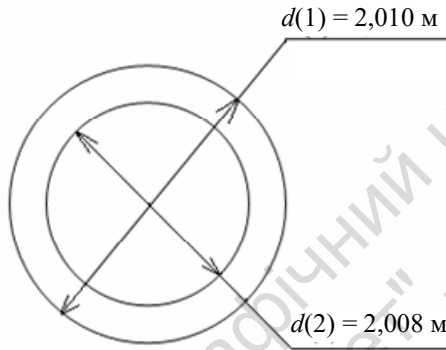
У ряді випадків можна використати такий прийом. Якщо  $x_1$  і  $x_2$  – близькі за значеннями аргументи, то їхня різниця  $\Delta x = x_2 - x_1$  повинна бути малою порівняно із  $x_1$  і  $x_2$ . Тоді для різниці близьких значень функції:  $f(x_1)$  і  $f(x_2)$  отримуємо:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = \\ &= f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_1)}{2!} \Delta x^2 + \dots - f(x_1) \approx f'(x_1) \Delta x. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Цю формулу можна використовувати для обрахунків похибки функції, якщо значення аргументів близькі за значеннями.

Проілюструємо можливість використання співвідношення (3.32) на конкретному прикладі.

**Приклад 3.7.** Знайти об'єм газгольдера (рис. 3.3), який складається із двох концентричних сфер із діаметрами  $d(1)_{\text{зовн}} = 2,010$  м і  $d(2)_{\text{вн.}} = 2,008$  м, де  $d(1)_{\text{зовн}}$  – зовнішній радіус і  $d(2)_{\text{вн.}}$  – внутрішній радіус.



**Рис. 3.3.** Схема газгольдера

**Розв'язок.** Якщо провести розрахунки без використання формули (3.32), то отримуємо:

$$V_{\text{зовн.}} = (\pi/6) (d_{\text{зовн}})^3 = (3,142/6) \cdot 2,010^3 = 4,25\text{м}^3;$$

$$V_{\text{вн.}} = (\pi/6) (d_{\text{вн.}})^3 = (3,142/6) \cdot 2,008^3 = 4,24 \text{ м}^3;$$

$$\Delta V = V_{\text{зовн.}} - V_{\text{вн.}} = 4,25 - 4,24 = 0,01\text{м}^3.$$

Отримані розрахунки показують, що якщо обмежитися для  $V_{\text{зовн.}}$  і  $V_{\text{вн.}}$  трьома значущими цифрами, то у відповіді отримуємо грубу помилку – всього одну значущу цифру.

Якщо використати формулу (3.32), то маємо:

$$f'(d)\Delta d = \left( \frac{\pi \cdot d_1^3}{6} \right)' \Delta d = \frac{3\pi \cdot d_1^2}{6} \cdot \Delta d = \frac{\pi \cdot d_1^2}{2} \cdot \Delta d;$$

$$f'(d)\Delta d = \frac{3,14159 \cdot (2,008)^2}{2} \cdot (2,010 - 2,008) =$$

$$= \frac{3,14159 \cdot 4,0321}{2} \cdot 0,002 = 12,6672 \cdot 0,001 = 0,013.$$

У цьому випадку отримано точність у розрахунках до двох значущих цифр.

Після розгляду понять абсолютна та відносна похибки, безпосередні й опосередковані вимірювання, ще раз хочеться повернутися до питання про кількість вимірювань в експерименті. Перед експериментаторами завжди постає питання: "Скільки треба вимірити значень?" Для цього спочатку треба порівняти значення випадкової помилки та систематичної похибки.

*Можна виділити три випадки:*

1. Систематична похибка значно перевищує випадкову  $\tilde{\sigma}_x \ll \varepsilon$ ;
2. Випадкова помилка значно перевищує систематичну похибку  $\tilde{\sigma}_x \gg \varepsilon$ ;
3. Випадкова помилка та систематична похибка одного порядку  $\tilde{\sigma}_x \approx \varepsilon$ .



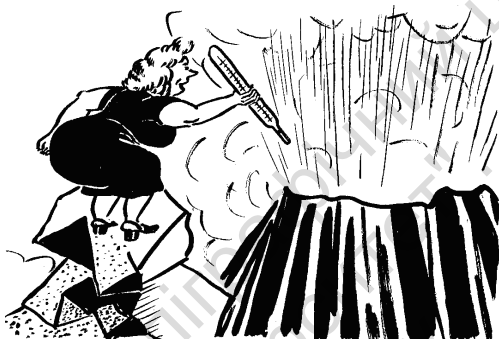
**Рис. 3.4.** Систематична похибка вимірювання відстані циркулем набагато перевищує відхилення руху електронів в атомі – випадок 1

Розглянемо ці випадки на прикладі вимірювання температури.

1. Якщо використовувати для вимірів грубий прилад, наприклад термометр, а систему ретельно термостатувати (ізолювати по можливості від дії зовнішніх факторів) за допомогою ультратермостата, то наш прилад (термометр) буде весь час показувати одне й те ж саме значення. У цьому випадку достатньо всього одного вимірювання. Аналогічна ситуація наведена на рис. 3.4, де за допомогою грубого приладу намагаються виміряти радіус електронної орбіталі.

2. Протилежна ситуація. Візьмемо чутливий термометр, наприклад термометр Бекмана, для вимірювання температури в

системі з інтенсивним теплообміном (тобто система перебуває під впливом різних випадкових зовнішніх чинників). Чутливий прилад реагує на найменші відхилення температури й оскільки ці відхилення хаотичні та достатньо інтенсивні, то маємо хаотично розсіяний масив точок, для якого визначити математичне сподівання практично неможливо. Отже, у цьому випадку підвищення кількості вимірів виявляється неефективним. Рис. 3.5 добре ілюструє подібну ситуацію.



**Рис. 3.5. Випадкова помилка температури у кратері вулкана набагато перевищує можливості вимірювання температури термометром – випадок 2**

У дослідженнях треба реалізовувати третій випадок. Тобто, випадкова помилка та систематична похибка одного порядку. Саме для цього випадку є сенс підвищувати кількість вимірювань (до розумних меж), щоб звужити довірчий інтервал та отримати більш якісні дані.

### **3.5. Нерівноточні вимірювання**

У деяких випадках ті чи інші результати вимірювань можуть бути більш надійними, ніж інші. Наприклад, вимірювання проводились на обладнаннях різного класу. Такі результати є *нерівноточними*. Тут кожному вимірюванню відповідає своя *статистична вага*:  $g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq \dots g_n$ .

У цьому випадку оцінкою математичного сподівання є вже не середньоарифметичне, а *середньозважене значення* випадкової величини:

$$\tilde{m}_x = m_x^* = \frac{\sum_i x_i \cdot p_i^*}{\sum_i p_i^*} = \frac{\sum_i x_i \cdot \frac{g_i}{n}}{\sum_i \frac{g_i}{n}} = \frac{\sum_i x_i \cdot g_i}{\sum_i g_i}, \quad (3.33)$$

де  $p_i^*$  – статистична частота.

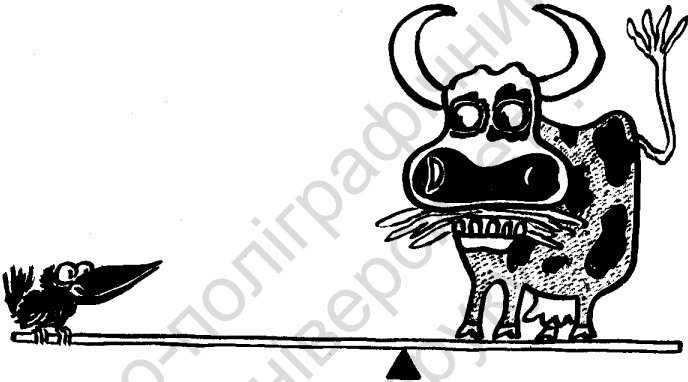


Рис. 3.6. Пошук середньозваженого значення

При  $g_1 = g_2 = g_3 = \dots = g_n = \text{const}$  з рівняння (3.33) отримуємо:

$$\tilde{m}_x = m_x^* = \frac{\sum_i x_i \cdot \text{const}}{\sum_i \text{const}} = \frac{\text{const} \cdot \sum_i x_i}{\text{const} \cdot n} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \bar{x}. \quad (3.34)$$

Отже, середньоарифметичне є частковим випадком середньозваженого при рівних вагах, тобто для рівноточних вимірювань.

Дисперсія для нерівноточних вимірювань визначається за формулою, аналогічною з (3.9):

$$D_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 \cdot g_i}{n - 1}, \quad (3.35)$$

тоді

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 \cdot g_i}{n-1}}. \quad (3.36)$$

Відзначимо, що у випадку рівноточних вимірювань  $D[x_1] = D[x_2] = \dots = D[x_i] = \dots = D[x_n]$ . Для нерівноточних вимірювань нульова дисперсія в рівнянні (3.35) має зміст дисперсії на одиницю ваги.

Покажемо це. Припустимо, що вимірювання проводять серіями, а всередині кожної серії результати є рівноточними:

$$\begin{array}{ccc} \text{I серія} & \text{II серія} & \text{III серія} \\ \underbrace{x'_1, x'_2, x'_3 \dots x'_k}_{g_1=k} & \underbrace{x''_1, x''_2, x''_3 \dots x''_l}_{g_2=l} & \underbrace{x'''_1, x'''_2, x'''_3 \dots x'''_m}_{g_3=m} \end{array}$$

Усього маємо  $n$  серій.

Усередині кожної серії легко визначається середнє арифметичне:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k x'_i}{k} = \frac{\sum_{i=1}^k x'_i}{g_1}; \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^l x''_i}{l} = \frac{\sum_{i=1}^l x''_i}{g_2}; \quad \bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^m x'''_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m x'''_i}{g_3}; \dots$$

За наявності проміжних середніх ( $\bar{x}_i$ ) можна знайти середнє по всіх серіях ( $\tilde{m}_{\bar{x}}$ ). Зрозуміло, що величини ( $\bar{x}_i$ ) треба обробляти як нерівноточні вимірювання та шукати загальне середнє за формулою (3.33):

$$\tilde{m}_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot g_i}{\sum_{i=1}^n g_i},$$

де  $n$  – кількість серій.

Зрозуміло, що проміжне середнє ( $\bar{x}_i$ ) тим точніше, чим із більшої кількості доданків воно отримано, тобто чим більше число вимірювань у кожній групі. Тому доцільно прийняти статистичну вагу для ( $\bar{x}_i$ ) рівною (чи пропорційною) кількістю вимірювань всередині групи.



Оскільки всередині групи вимірювання рівноточні та при  $k$  вимірюваннях  $g_i = k$  (відповідно до вищесказаного), то згідно з рівністю (3.3), можна записати:

$$\tilde{D}_{x_i} = \frac{\tilde{D}_{x_i}}{g_i} = \frac{\tilde{D}_o}{g_i}. \quad (3.37)$$

Із співвідношення (3.37) видно, що  $\tilde{D}_{x_i} = \tilde{D}_o$  при  $g_i = 1$ , тобто  $\tilde{D}_o$  виявляється дисперсією одиниці ваги.

Тепер визначимо дисперсію середньо зваженого значення  $\tilde{D}_{\bar{x}}$ , яке необхідно знати для визначення середньоквадратичного відхилення середньо зваженого значення  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  і побудові довірчого інтервалу. Використаємо для цього властивості дисперсії (2.42)–(2.44):

$$\begin{aligned} D[\tilde{m}_{\bar{x}}] &= D \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot g_i}{\sum_{i=1}^n g_i} \right] = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n g_i \right)^2} D \left[ \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot g_i \right] = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n D[\bar{x}_i \cdot g_i]}{\left( \sum_{i=1}^n g_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i^2 \cdot D[\bar{x}_i]}{\left( \sum_{i=1}^n g_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i^2 \cdot \frac{\tilde{D}_o}{g_i}}{\left( \sum_{i=1}^n g_i \right)^2} = \frac{\tilde{D}_o \left( \sum_{i=1}^n g_i \right)}{\left( \sum_{i=1}^n g_i \right)^2} = \frac{\tilde{D}_o}{\sum_{i=1}^n g_i}. \end{aligned}$$

Тобто:

$$D[\tilde{m}_{\bar{x}}] = \frac{\tilde{D}_o}{\sum_{i=1}^n g_i}. \quad (3.38)$$

Формула (3.38) аналогічна формулі (3.3) для рівноточних вимірювань. Для середньоквадратичної помилки середньозваженого отримуємо з (3.38) формулу, що аналогічна (3.11):

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\tilde{\sigma}_o}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_i}}. \quad (3.39)$$

Розглянемо приклад обробки нерівноточних вимірювань.

*Приклад 3.8.* Знайти середньозважене значення ( $\tilde{m}_x$ ) і його середньоквадратичну похибку ( $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x}$ ) для серії нерівноточних вимірювань.

**Таблиця 3.3**

**Обробка нерівноточних вимірювань**

$n$	$x_i$	$g_i$	$x_i \cdot g_i$	$x_i - \tilde{m}_x$	$(x_i - \tilde{m}_x)^2 g_i$
1	43	5	215	0,5	1,25
2	39	1	39	-3,5	12,25
3	44	1	44	1,5	2,25
4	42	1	42	-0,5	0,25
5	45	1	45	2,5	6,25
6	40	1	40	-2,5	6,25
$\Sigma$		10	425		28,5

*Розв'язок.* У табл. 3.3 наведено значення випадкових величин і статистична вага кожного вимірювання. Для зручності всі необхідні значення для розрахунку середнього зваженого та дисперсії наведено також у табл. 3.3.

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot g_i = 425;$$

$$\tilde{m}_x = \frac{425}{10} = 42,5 \text{ (за формулою 3.33);}$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{28,5}{6-1}} = 2,4 \text{ (за формулою 3.36);}$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = \frac{2,4}{\sqrt{10}} = 0,74 \text{ (за формулою 3.39).}$$

Корисно порівняти нерівноточні вимірювання з рівноточними.

Спочатку спробуємо замість одного значення  $x_i = 43$  з  $g_i = 5$  узяти п'ять однакових значень  $x_i = 43$  з  $g_i = 1$ . Тоді отримуємо серію рівноточних вимірювань, наведених у табл. 3.4.

Розрахунок числових характеристик дає такі результати:

$$\tilde{m}_x = \bar{x} = \frac{425}{10} = 42,5; \quad \tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{28,5}{10-1}} = 1,78; \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = \frac{1,78}{\sqrt{10}} = 0,56.$$

Таблиця 3.4

## Порівняння нерівноточних вимірювань з рівноточними (варіант I)

$n$	$x_i$	$x_i - \tilde{m}_x$	$(x_i - \tilde{m}_x)^2 g_i$
1	43	0,5	0,25
2	43	0,5	0,25
3	43	0,5	0,25
4	43	0,5	0,25
5	43	0,5	0,25
6	39	-3,5	12,25
7	44	1,5	2,25
8	42	-0,5	0,25
9	45	2,5	6,25
10	40	-2,5	6,25
$\Sigma$	425	0	28,5

Отримане значення  $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = 0,56$  виявилось значно меншим за наведене вище  $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = 0,74$  для нерівноточних вимірювань.

Отже, заміна одного значення зі статистичною вагою  $g_i = 5$  на п'ять рівних значень  $x_i$  зі статистичною вагою  $g_i = 1$  (варіант I) є помилкою.

Насправді одне значення зі статистичною вагою  $g_i = 5$  еквівалентно п'яти різним значенням  $x_i$ , середньоарифметичне яких повинно дорівнювати цьому числу (в нашому прикладі 43).

Розглянемо тепер варіант II. Замінімо одне значення 43 на п'ять різних значень: 40; 43; 44; 45; 43, для яких  $\bar{x} = \frac{40 + 43 + 44 + 45 + 43}{5} = 43$ . Отримані дані наведені в табл. 3.5.

Значення числових характеристик за такого підходу (варіант II) наближаються до таких для нерівноточних вимірювань:

$$\bar{m}_x = \bar{x} = \frac{425}{10} = 42,5; \quad \tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{42,5}{10-1}} = 2,2; \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = \frac{2,2}{\sqrt{10}} = 0,70.$$

У варіанті II  $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = 0,70$  наближається до значення  $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = 0,74$  для нерівноточних вимірювань, отже наше припущення виправдалося.

Таблиця 3.5

Порівняння нерівноточних вимірювань з рівноточними (варіант II)

$n$	$x_i$	$x_i - \tilde{m}_x$	$(x_i - \tilde{m}_x)^2 g_i$
1	40	-2,5	6,25
2	43	0,5	0,25
3	45	2,5	6,25
4	44	1,5	2,25
5	43	0,5	0,25
6	39	-3,5	12,25
7	44	1,5	2,25
8	42	-0,5	0,25
9	45	2,5	6,25
10	40	-2,5	6,25
$\Sigma$	425	0	42,5

У випадку нерівноточних вимірювань, як і у випадку рівноточних, іноді зручно обраховувати дисперсію, зміщуючи початок координат у точку, яка наближена до  $\tilde{m}_x$ . Виведемо відповідну формулу для  $\tilde{D}_0$ , використовуючи формулу (3.35):

$$\begin{aligned} \tilde{D}_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}_x)^2 \cdot g_i}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot (x_i^2 - 2\tilde{m}_x \cdot x_i - \tilde{m}_x^2)}{n-1} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i^2 - 2\tilde{m}_x \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot g_i + \tilde{m}_x^2 \cdot \sum_{i=1}^n g_i}{n-1}. \end{aligned}$$

Із формули (3.33) отримаємо:

$$\tilde{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i = \tilde{m}_x \cdot \sum_{i=1}^n g_i.$$

Тоді

$$\tilde{D}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i^2 - 2\tilde{m}_x \cdot \tilde{m}_x \cdot \sum_{i=1}^n g_i + \tilde{m}_x^2 \cdot \sum_{i=1}^n g_i}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i^2 - \tilde{m}_x^2 \cdot \sum_{i=1}^n g_i}{n-1}.$$

Отже

$$\tilde{D}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i^2 - \tilde{m}_x^2 \cdot \sum_{i=1}^n g_i}{n-1}. \quad (3.40)$$

Розрахунок  $\tilde{D}_0$  за формулою (3.40) схожий із розрахунком  $\tilde{D}_x$  для рівноточних вимірювань через статистичний аналог другого початкового моменту ( $\alpha_2^*[x]$ ).

Розглянемо приклад такого розрахунку.

*Приклад 3.9.* Знайти ( $\tilde{m}_x$ ) та ( $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x}$ ) для масиву нерівноточних значень.

*Таблиця 3.6*

**Обробка нерівноточних вимірювань  
зі зміщенням початку координат**

$n$	$g_i$	$x_i$	$x'_i = x_i - 240,0$	$g_i x_i$	$g_i (x'_i)^2$
1	1	236,4	-3,6	-3,6	12,96
2	3	241,6	1,6	4,8	7,68
3	1	242,0	2,0	2,0	4,00
4	5	240,7	0,7	3,5	2,45
5	3	237,4	-2,6	-7,8	20,28
6	5	239,5	-0,5	-2,5	1,25
7	3	243,8	3,8	11,4	43,32
8	5	242,5	2,5	12,5	31,25
$\Sigma$	26			23,3	123,19

Усі необхідні для розрахунку числових характеристик обчислення наведені в табл. (3.6).

$$\tilde{m}_x = \frac{23,3}{26} = 0,9; \quad \tilde{m}_x = 0,9 + 240,0 = 240,9;$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{123,19 - 0,9^2 \cdot 26}{8-1}} = 3,82; \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = \frac{3,82}{\sqrt{26}} = 0,75.$$

Побудова довірчого інтервалу для нерівноточних вимірювань відбувається аналогічно рівноточним, тобто довірчий інтервал визначається проміжком  $\tilde{m}_x \pm t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x}$ , де параметр  $t_\beta$  – коефіцієнт

Ст'юдента, значення якого залежить від кількості вимірювань ( $n$ ) і значення довірчої імовірності ( $\beta$ ) (див. додаток 2).

Розрахунки показують, що обробка нерівноточних вимірювань відносно нескладна процедура, якщо відомі статистичні ваги ( $g_i$ ). Визначення  $g_i$  може проводитися різними способами.

Якщо проводити усереднення проміжних середніх значень, як показано вище, то статистичну вагу можна прирівняти до кількості вимірювань у кожній групі (чи взяти пропорційне цьому числу).

Формула (3.37) дає ще один спосіб оцінки статистичної ваги. Якщо відомі значення дисперсій, то ваги беруться обернено пропорційними до відповідних дисперсій:

$$g_1 : g_2 : g_3 : \dots : g_i : \dots : g_n = \frac{1}{\tilde{D}_1} : \frac{1}{\tilde{D}_2} : \frac{1}{\tilde{D}_3} : \dots : \frac{1}{\tilde{D}_i} : \dots : \frac{1}{\tilde{D}_n} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{\sigma}_1^2} : \frac{1}{\tilde{\sigma}_2^2} : \frac{1}{\tilde{\sigma}_3^2} : \dots : \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} : \dots : \frac{1}{\tilde{\sigma}_n^2}. \quad (3.41)$$

У цьому випадку одним зі значень статистичної ваги треба задатися.

Якщо значення дисперсій невідомі, то можна оцінити вагу, виходячи з таких міркувань. Зазвичай для проведення експерименту необхідно виконання умови  $\varepsilon_i \cong \sigma_i$  (дивись вище). Тоді, якщо відома похибка  $\varepsilon_i$ , то можна провести оцінку ваги зі співвідношення:

$$g_1 : g_2 : g_3 : \dots : g_i : \dots : g_n = \frac{1}{\varepsilon_1^2} : \frac{1}{\varepsilon_2^2} : \frac{1}{\varepsilon_3^2} : \dots : \frac{1}{\varepsilon_i^2} : \dots : \frac{1}{\varepsilon_n^2}. \quad (3.42)$$

### 3.6. Сумісність результатів досліджень

Часто виникає необхідність порівняти дані, які отримані в різних умовах (різні прилади, експериментатори, методики тощо). Розбіжності між отриманими результатами можуть пов'язуватися з:

- наявністю систематичної помилки, у цьому випадку результати вважаються **несумісними**;
- відхилення мають випадковий характер і пов'язані з великим розсіянням результатів, у цьому випадку можна вважати, що ці

результати належать до однієї генеральної сукупності точок, вони містяться в межах похибки досліду і вважаються *сумісними*.

Для несумісних результатів знаходять причину, що викликала систематичну похибку, та усувають її. Сумісні результати можна обробити як нерівноточні вимірювання.

Найпростіший критерій сумісності результатів – це перекривання (чи не перекривання) довірчих інтервалів. Перекриванню довірчих інтервалів відповідають сумісні результати, а не перекриванню – несумісні.

Якщо  $l_{\beta_1}$  та  $l_{\beta_2}$  – це напівширини довірчих інтервалів, то умову сумісності можна записати так:

$$l_{\beta_1} + l_{\beta_2} > |\bar{x}_2 - \bar{x}_1|, \quad (3.43)$$

де  $\bar{x}_1$  і  $\bar{x}_2$  – середні значення величин, що порівнюють.

Інший спосіб перевірки сумісності  $\bar{x}_1$  і  $\bar{x}_2$  полягає у співставленні різниці  $|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|$  із середньоквадратичною похибкою цієї різниці. Вводиться параметр  $t$ :

$$t = \frac{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}}. \quad (3.44)$$

При достатньо великому числі вимірювань величина  $t$  підкоряється нормальному розподіленню, отже,  $t = \Phi^{-1}(\beta)$ , де  $\beta$  – ймовірність того, що  $t$  не перевищує значення, що задано наперед, тобто ймовірність того, що відхилення  $|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|$  не перевищує величину  $t \cdot [\tilde{\sigma}_{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}]$ . Задаючи достатньо велике значення довірчої ймовірності ( $\beta = 0,99$ ), знаходять параметр  $t$  і співставляють його зі значенням  $t_{\text{експ}}$ , яке розраховують із формули (3.44).

Якщо  $t_{\text{експ}} < t = \Phi^{-1}(\beta)$ , то результати вважаються сумісними.

Критерії (3.43) і (3.44) дають практично однакові результати.

На закінчення можна навести схему послідовності обробки експериментальних результатів (рис. 3.7).

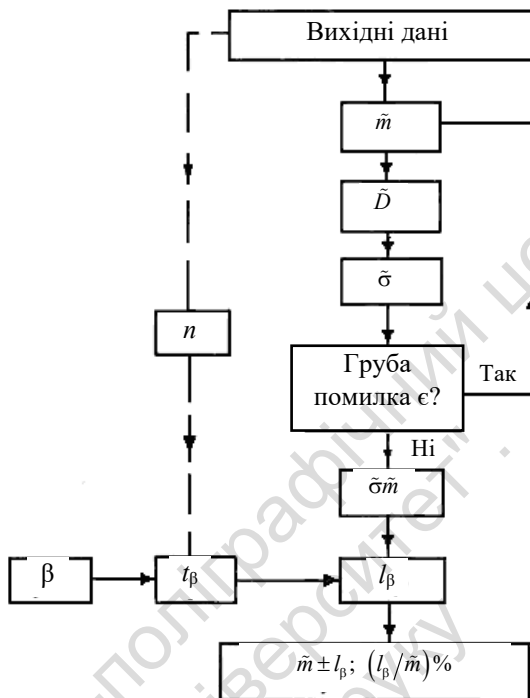


Рис. 3.7. Блок-схема обробки експериментальних результатів

Для вихідних результатів спочатку обраховується значення оцінок математичного сподівання, дисперсії та середньо квадратичного відхилення. Якщо є груба помилка, то треба повернутися до вихідних даних, їх переробити та знову обрахувати значення оцінок математичного сподівання, дисперсії та середньо квадратичного відхилення. Якщо грубої помилки немає, то обчислюється оцінка середньо квадратичного відхилення для оцінки математичного сподівання. Потім, виходячи з кількості точок ( $n$ ), і бажаної довірчої ймовірності ( $\beta$ ), знаходять значення  $t_\beta$  і будують довірчий інтервал ( $l_\beta$ ).



### 3.7. Урахування довірчого інтервалу в записі остаточного результату вимірювання

Результатом обробки даних при довірчій імовірності, що задається, є два числа: середнє значення  $\bar{x}$  і його випадкова помилка (напівширина довірчого інтервалу  $\varepsilon_\beta$ ). Обидва числа є остаточним результатом багаторазового вимірювання й повинні сумісно записуватися у стандартній формі:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon_\beta. \quad (3.45)$$

Цей кінцевий запис повинен містити лише достовірні, тобто надійно визначені цифри цих чисел.

Помилкою було б вважати, що висока точність розрахунків під час обробки даних може сприяти отриманню більш точних результатів вимірювання. Наприклад, калькулятор чи комп'ютер можуть видати десяток ненульових цифр середньо квадратичної похибки, але чи всі вони будуть достовірними?

Обробка даних, якою б складною вона не була, є вторинною відносно до природи об'єкта, що вивчається, і процесу вимірювання. В остаточних числових значеннях це варто враховувати, що й роблять шляхом їх округлення. Необхідність округлення є простий наслідок невизначеності під час оцінювання остаточних результатів, що знаходять за даними експерименту.

Обмежена кількість вимірювань вносить невизначеність, як у середнє значення, так і в похибку. Вище показано, що відносна неточність оцінювання величини стандартного відхилення

середнього  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  складає приблизно  $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ . При  $n \approx 10$  відносна

похибка оцінювання  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  може досягати 30 %. Зрозуміло, що тоді втрачає сенс приводити в похибці зайві цифри, які можуть бути завідомо ненадійними. Однак, під час виконання проміжних розрахунків корисно мати одну або дві додаткові цифри. Округлювання великої кількості проміжних результатів, може привести до значного зміщення остаточного результату.

## Порядок виконання округлювання результатів безпосереднього вимірювання

1. Виконується попередній запис остаточного результату вимірювання у вигляді (3.45) і виносяться за загальну дужку однакові порядки середнього та випадкової помилки, тобто множник вигляду  $10^k$ , де  $k$  – ціле число.

2. Округлюється число, що відповідає випадковій помилці: до однієї значущої (ненульової) цифри ліворуч, якщо ця цифра більша 2, або до двох перших цифр у протилежному випадку.

3. Округлюється число, що відповідає середньому значенню: останніми праворуч залишаються цифри тих розрядів, які збереглися в похибці після її округлювання.

4. Остаточо записується  $x = \bar{x} \pm \varepsilon$  з урахуванням виконаних округлювань. Загальний порядок та одиниці вимірювання величини наводяться за дужками.

Приклади округлювання й записи остаточних результатів вимірювань у стандартній формі наведені в табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Запис остаточного результату експерименту

Попередній запис	Стандартна форма запису
$K_c = 0,003758 \pm 0,000031$	$K_c = (3,76 \pm 0,03) \cdot 10^{-3}$
$k = 46438 \pm 2155 \text{ л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$	$k = (4,64 \pm 0,22) \cdot 10^4 \text{ л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$
$E_a = 84349 \pm 5155 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1}$	$E_a = 84 \pm 5 \text{ кДж} \cdot \text{моль}^{-1}$
$A = (638,125 \pm 174,5) \cdot 10^5$	$A = (6,4 \pm 1,7) \cdot 10^7$

Існують й інші методики округлювання з урахуванням похибки вимірювання. Зазвичай, точність оцінки випадкової помилки є дуже невеликою. Тому абсолютна похибка округлюється до однієї значущої цифри. Однак, якщо ця цифра дорівнює одиниці, варто залишити дві значущі цифри. Під час остаточного запису результатів хімічного експерименту випадкову помилку заокруглюють до першої значущої цифри, навіть у тому випадку, коли вона дорівнює 1 або 2. За такого способу заокруглювання стандартні форми запису з табл. 3.7 матимуть вигляд:  $A = (6 \pm 2) \cdot 10^7$ ,  $k = (4,6 \pm 0,2) \cdot 10^4 \text{ л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ . Варто наголосити, що в будь-якому випадку результати вимірювання та помилки повинні виражатися з однаковою точністю.

## Питання для самостійного повторення

*Замість крапок запишіть таке продовження тексту, щоб отримати правильне визначення або твердження. Де можливо запишіть відповідну формулу.*

1. Оцінюванням параметра можна назвати...
2. Вимоги до оцінювання параметра: ...
3. Оцінюванням для математичного сподівання  $\epsilon$ ...
4. Оцінювання математичного сподівання  $\epsilon$  незміщеним, тому що ...
5. Ефективність оцінювання математичного сподівання підтверджується...
6. Оцінюванням для дисперсії  $\epsilon$ ...
7. Для того, щоб оцінювання дисперсії було незміщеним, потрібно...
8. Обґрунтованість для оцінювання дисперсії визначається...
9. Середньоквадратична помилка середнього арифметичного – це...
10. Правило трьох сигм використовують для перевірки...
11. Довірчий інтервал визначається як...
12. Скільки необхідно вимірювань значень випадкової величини для коректного проведення експерименту?
13. Абсолютна похибка це...
14. Відносна похибка це...
15. Похибку ( $\epsilon_u$ ) деякої величини  $u$ , яка зв'язана функціонально залежністю з безпосередньо вимірюваною величиною  $x$ :  $u = f(x)$ , визначається як...
16. Похибка добутку двох величин визначається як...
17. Похибка суми двох величин визначається як...
18. Похибка різниці двох величин визначається як...
19. Результати є нерівноточними, якщо...
20. Оцінюванням математичного сподівання для нерівноточних вимірювань  $\epsilon$ ...
21. Оцінювання дисперсії для нерівноточних вимірювань визначається як...
22. Визначення статистичної ваги може проводитися...
23. Сумісні результати можна обробити як...
24. Порядок обробки експериментальних результатів проводиться так...

## Задачі для самостійного розв'язку

1. При нормальному розподіленні відхилення ( $\rho$ ) визначається з умови:  $p(|x - m| < \rho) = \frac{1}{2}$ , тобто поява випадкової величини  $x$  всередині відрізка шириною  $2\rho$  (що розташований симетрично відносно математичного сподівання) і за його межі – подія рівноймовірна. Знайти зв'язок між  $\rho$  та  $\delta$ .

2. При визначенні залишкового вмісту стиролу (с, %) у зразку полімеру отримано такі результати:

№	Концентрація стиролу, %
1	0,56
2	0,58
3	0,57
4	0,54
5	0,54

З'ясувати, чи результат експерименту під номером 2 не є грубою помилкою? Перевірити результат експерименту під номером 2 на грубу помилку у варіанті "включення" цього значення та без нього під час розрахунку проміжку  $3\sigma$ . Який із двох варіантів розрахунку буде правильним? Відповідь аргументуйте.

3. Об'єм циліндра визначається за формулою  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ . Знайти абсолютну похибку у визначенні висоти, якщо висота циліндра  $h = 5,00$  м, радіус  $r = 3,0000$  м ( $\varepsilon_r = 10^{-4}$ ), абсолютна похибка вимірювання об'єму циліндра  $\varepsilon_V = 10^{-2} \text{ м}^3$ ,  $\pi = 3,141592$  ( $\varepsilon_\pi = 10^{-6}$ ).

4. Знайти абсолютну та відносну похибки у визначенні об'єму кулі  $\left( V = \frac{4\pi \cdot r^3}{3} \right)$ , якщо  $\pi = 3,141592$  ( $\varepsilon_\pi = 10^{-6}$ ),  $r = 7,000$  м ( $\varepsilon_r = 10^{-3}$  м).

5. Знайти абсолютну та відносну похибки у визначенні сталої калориметра  $\left( C_k = \frac{I \cdot U \cdot \tau}{\Delta t} \right)$ , якщо  $I = 0,72$  А ( $\varepsilon_I = 10^{-2}$  А),  $U = 2,20$  В ( $\varepsilon_U = 10^{-2}$  В),  $\tau = 3$  хв ( $\varepsilon_\tau = 1\text{с}$ ),  $\Delta t = 0,223$  К ( $\varepsilon_{\Delta t} = 10^{-3}$  К).

6. Унаслідок визначення вмісту кальцію в зубній емалі методом атомно-адсорбційної спектроскопії (w, %) отримано такі дані:

№	Вміст кальцію, %
1	32,8
2	32,0
3	33,0
4	31,6
5	32,9
6	32,4
7	31,9
8	34,2
9	33,0
10	32,1
11	33,3
12	32,2
13	32,0
14	33,4
15	33,3
16	32,9
17	33,7
18	31,0
19	32,3
20	32,4

Перевірити, чи результат аналізу під номером 18 не є грубою помилкою?

7. Під час проведення лабораторної роботи зі встановлення кінетичних параметрів мутарагації глюкози отримали дві серії констант швидкостей:  $k_1$  (у присутності HCl) і  $k_2$  (без HCl). Розрахувати похибку експеримента.

$n$	$k_1 \cdot 10^3, \text{c}^{-1}$	$k_2 \cdot 10^4, \text{c}^{-1}$
1	1,46	1,56
2	1,38	1,81
3	1,72	1,92
4	1,85	2,04
5	1,73	1,69
6	1,68	1,91
7	1,75	1,84
8	1,73	1,81
9	1,59	1,77
10	1,71	1,78
11	1,85	1,93
12	1,64	1,82

8. Із якою абсолютною похибкою треба визначити радіус кола, щоб відносна похибка визначення площі кола була  $0,01 \text{ см}^2$ , якщо радіус кола  $1,5 \text{ см}$  і  $\pi = 3,141592$  ( $\varepsilon_\pi = 10^{-6}$ ).

9. Записати формулу для оцінювання абсолютної та відносної похибок для функції трьох змінних  $f(a, b, c) = a^2 \cdot b^2 + c^2$ , якщо  $\Delta a = \Delta b = \Delta c = \Delta$ .

10. Різні автори отримали такі значення для швидкості світла:

$n$	$c_i, \text{ км / с}$	$g_i$
1	299784,00	0,10
2	299782,00	0,01
3	299798,00	0,04
4	299774,00	0,62
5	299786,00	0,10
6	299771,00	0,10
7	299771,00	0,10
8	299776,00	0,27
9	299776,00	0,12
10	299793,10	250,00
11	299776,00	0,04
12	299789,80	1,11
13	299792,00	0,27
14	299792,00	1,11
15	299792,50	10,00
16	299789,50	111,1
17	299792,60	20,20
18	299793,00	111,10
19	299795,10	1,04
20	299792,40	1,74
21	299794,20	5,10

У таблиці наведені значення статистичної ваги ( $g_i$ ) для кожного значення  $c_i$ . Знайти генеральне середнє значення для швидкості світла ( $c$ ).

11. Визначити розмір частинок дисперсної фази колоїдної системи можна за допомогою ультрамікроскопа. Якщо частинки сферичної форми,

то діаметр частинок можна розрахувати за формулою  $d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot c \cdot V}{\pi \cdot n \cdot \rho}}$ ,

де  $c$  – масова концентрація дисперсної фази;  $V$  – об'єм системи;  $n$  – середня кількість частинок в об'ємі  $V$ ,  $\rho$  – густина дисперсної фази. Записати формулу для оцінювання абсолютної та відносної

похибок у визначенні діаметра частинки, якщо відомі абсолютні похибки  $\Delta c$ ,  $\Delta V$ ,  $\Delta n$ ,  $\Delta r$ . Число  $\pi$  вважати сталою величиною.

12. За законом Лапласа для розподілу газів в атмосфері справедливим є рівняння  $n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ , де  $n_0$  – густина газу на висоті  $h = 0$ , яка задається довільно, а  $n$  – густина газу на висоті  $h$ . Записати вирази для обрахунку абсолютної та відносної похибок у визначенні  $n$ , якщо  $n_0$ ,  $g$ ,  $k$  – сталі величини, які визначено з точністю, що набагато перевищує точність у визначенні  $m$ ,  $h$ ,  $T$ .

13. Записати вирази для абсолютних і відносних похибок таких функцій:

$$U(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_2}; \quad U(x_1, x_2) = \frac{x_1 \cdot x_2^2}{2};$$

$$U(x) = 1 + \frac{x^2}{2}; \quad U(x_1, x_2) = e^{-x_1} \cdot e^{-x_2}.$$

14. Температуру кипіння бензену  $80,36^\circ\text{C}$  визначили з абсолютною похибкою  $0,01^\circ\text{C}$ . Питома теплота випаровування бензену за температури кипіння ( $l_m$ ) дорівнює  $394,8 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}$  ( $\varepsilon_{l_m} = 0,1 \text{ кДж/кг}$ ). Чому дорівнюють відносна й абсолютна похибки у визначенні ебуліоскопічної константи ( $k_e = \frac{RT_m^2}{1000 \cdot l_m}$ )?  $R = 8,314462 \pm 0,000007 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ .

15. Прискорення вільного падіння ( $g$ ) може розраховуватися за формулою:  $g = \pi^2 \cdot \frac{l}{\tau^2}$ , де  $l$  – довжина маятника, а  $\tau$  – період його коливаль.

Із якою абсолютною точністю повинна вимірюватися довжина маятника ( $l$ ), щоб відносна похибка у визначенні прискорення вільного падіння ( $g$ ) не перевищувала  $0,5\%$ , якщо  $l = 50,0 \text{ см}$ ;  $\tau = 0,71 \text{ с}$ ;  $\varepsilon_\tau = 0,001 \text{ с}$ ;  $\pi = 3,142$ ;  $\varepsilon_\pi = 0,0005$ ?

16. Під час вимірювання температури газовим термометром отримані такі значення тиску, об'єму й кількості речовини:  $V = 0,001 \text{ м}^3$ ;  $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$  і  $n = 0,0445 \text{ моль}$ . Відповідні стандартні відхилення дорівнюють:  $\Delta V = 1 \text{ см}^3$ ;  $\Delta p = 10^2 \text{ Па}$ ;  $\Delta n = 9 \cdot 10^{-5} \text{ моль}$ . Розрахувати значення температури, а також абсолютну та відносну похибки під час оцінювання температури газовим термометром, якщо  $R = 8,317 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ .

17. Константа швидкості залежить від температури так:  $\kappa = \kappa_0 \cdot e^{-\frac{E}{RT}}$ , де  $E$  – енергія активації,  $\kappa_0$  – передекспоненційний множник. Із якою абсолютною точністю повинна вимірюватися температура, щоб відносна похибка у визначенні константи не перевищувала 5 %, якщо  $E = 40000$  кал/моль,  $R = 2$  кал/(моль·К),  $T = 700$ К?

18. Тіло, масою  $m = 50,5$  г ( $\varepsilon_m = 0,1$  г) летить на висоті  $h = 2,00$  м ( $\varepsilon_h = 0,01$  м) зі швидкістю  $v = 10$  м/с ( $\varepsilon_v = 0,5$  м/с). Знайти відносну похибку у визначенні повної енергії тіла, якщо вважати, що тіло має лише кінетичну й потенційну енергії і  $g = 9,80 \pm 0,05$  м/с<sup>2</sup>.

### Відповіді до задач розділу 3

1.  $\rho = 0,59\delta$ ; 2. в обох варіантах результат № 2 не є грубою помилкою;  
 3.  $\delta_h = 0,014\%$ ;  $\varepsilon_h = 0,0007$  м; 4.  $\delta_v = 0,043\%$ ;  $\varepsilon_v = 0,62$  м<sup>3</sup>; 5.  $\delta_{C_K} = 2,8\%$ ;  $\varepsilon_{C_K} = 36,5$ ; 6. Результат під номером 18 не є грубою помилкою;  
 7.  $\bar{k}_1 = (1,67 \pm 0,09) \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ ;  $\bar{k}_2 = (1,82 \pm 0,09) \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ;  
 10.  $\bar{m}_c = 299792,2 \pm 0,8$ ;  $\bar{\sigma}_{m_c} = 0,39$ ;  
 14.  $\delta_{k_e} = 5,9 \cdot 10^{-3}\%$ ;  $\varepsilon_{k_e} = 1,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кг} \cdot \text{К}}{\text{моль}}$ ; 15.  $\varepsilon_l = 0,4$  см; 16.  $\delta_T = 0,4\%$ ;  
 $\varepsilon_T = 1,1$  К; 17.  $\varepsilon_T = 1,225$  К; 18.  $\delta_E = 7,7\%$ .



## РОЗДІЛ 4

### Метод найменших квадратів

#### 4.1. Основне рівняння методу найменших квадратів

Для двох величин ( $y$  та  $x$ ), що зв'язані між собою функціональною залежністю  $y = \varphi(a, b, c \dots x_i)$ , кількість точок, яка необхідна для визначення параметрів, повинна бути не меншою за число параметрів. Наприклад, пряма  $y = a \cdot x + b$  визначається двома точками, парабола  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  – трьома тощо. Це справедливо за відсутності помилок експерименту.

Наявність випадкових помилок змінює ситуацію. Наприклад, відомо (із фізичних або інших міркувань), що точки 1, 2, 3, 4, які зображено на рис. 4.1, відповідають лінійній залежності.

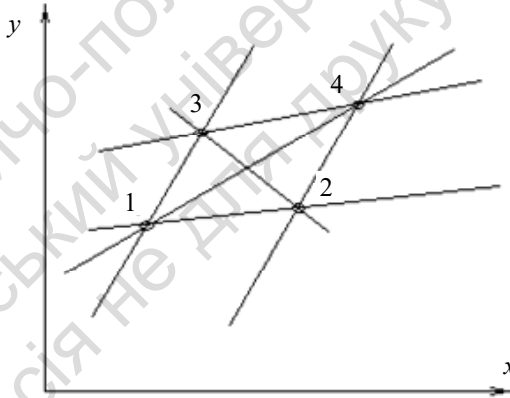


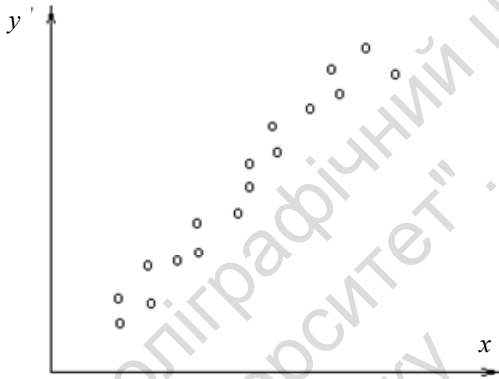
Рис. 4.1. Приклад лінійної залежності за наявності помилок експерименту

Спроби провести пряму лінію через довільну пару точок дає "віяло", що зображено на рис. 4.1. Це доводить, що використання всього двох точок для визначення прямої лінії за наявності

випадкових помилок експерименту явно недостатньо, щоб отримати надійний несуперечливий результат.

Отже, вплив випадкового фактору призводить до того, що для надійного визначення параметрів масив експериментальних даних повинен бути істотно більшим за кількість параметрів.

Подібний масив точок для функціональної залежності  $y = \varphi(a, b, c, \dots, x_i)$  зображено на рис. 4.2.



**Рис. 4.2. Масив точок для функціональної залежності  $y = \varphi(a, b, c, \dots, x)$**

За умови заданості функціональної залежності завдання полягає в оптимальному виборі параметрів  $(a, b, c, \dots)$ .

Дії випадкових факторів, що зумовлюють розкид точок, підлягають як функція  $(y)$ , так і аргумент  $(x)$ , але можна зосередити всі помилки на функції  $(y)$  і вважати, що аргумент  $(x)$  визначений правильно. Відхилення функції  $(y_i)$  від її точного значення – математичного сподівання  $(m_{y_i})$  позначимо через  $\varepsilon_i$  і назвемо *нев'язками*:

$$\varepsilon_i = y_i - m_{y_i}. \quad (4.1)$$

Точне значення функції  $(m_{y_i})$  задається, з одного боку, точними значеннями аргументу (згідно із зазначеною вище умовою), а, з іншого – точними значеннями параметрів  $(a, b, c, \dots)$ , тобто

$$m_{y_i} = \varphi(a, b, c, \dots, x_i). \quad (4.2)$$

Підставляючи (4.2) в (4.1), отримаємо:

$$\varepsilon_i = y_i - \varphi(a, b, c, \dots, x_i). \quad (4.3)$$

Функція  $\Phi = \varphi(a, b, c, \dots, x_i)$  і відхилення від неї (нев'язки  $\varepsilon_i$ ) зображені на рис. 4.3. Проте, точні значення параметрів ( $a, b, c, \dots$ ) наперед невідомі, і завдання якраз полягає в тому, щоб визначити їх оптимальним чином.

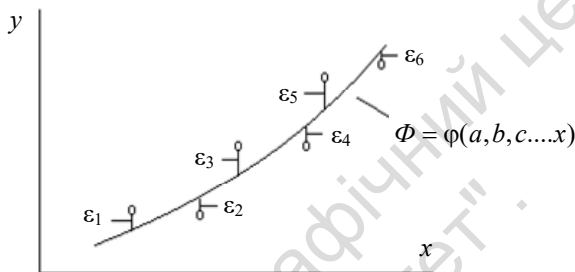


Рис. 4.3. Графічне зображення функції  $\Phi = \varphi(a, b, c, \dots, x_i)$  і невязок

Розв'язати цю задачу можна за допомогою *методу найменших квадратів (МНК)*. Розглянемо, у чому полягає цей метод.

Вважаємо, як і раніше (для окремо вимірної величини), що кількість випадкових дій велика, і, відповідно, закон розподілення випадкової величини  $y_i$  є нормальним, тобто

$$f_i(y_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y_i - m_{y_i})^2}{2\sigma_i^2}}. \quad (4.4)$$

З урахуванням (4.3) і (4.1) формулу (4.4) можна переписати:

$$f_i(y_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y_i - \varphi(a, b, c, \dots, x_i))^2}{2\sigma_i^2}} = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma_i^2}}. \quad (4.5)$$

Експериментальні точки ( $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$ ) з'являються незалежно одна від одної, відповідно, для ймовірності появи  $n$  точок, згідно з теоремою множення, отримаємо:

$$P = \prod_{i=1}^n f_i(y_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma_i^2}}. \quad (4.6)$$

Вважаємо вимірювання рівноточними, тобто

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_i = \dots = \sigma_n = \sigma.$$

Тоді

$$P = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}. \quad (4.7)$$

Імовірність  $P$  максимальна, коли  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_i = \dots = \varepsilon_n = 0$ , тобто коли всі точки знаходяться на лінії  $\Phi = \varphi(a, b, c, \dots, x_i)$  (рис. 4.3). Це означає, що помилка експерименту відсутня. На практиці за наявності випадкової помилки зробити всі  $\varepsilon_i$  такими, що дорівнюють нулеві, неможливо (деякі  $\varepsilon_i$  можуть дорівнювати нулю). Проте можна вимагати, спираючись на *принцип максимальної правдоподібності*, щоб ймовірність ( $P$ ) події: " $y_i$  найбільш близькі до своїх точних значень" була *максимальною*. Очевидно,  $P \rightarrow \max$ , при

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \min. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) і є основним рівнянням методу найменших квадратів.

Якщо позначити суму квадратів нев'язок через  $S$  і врахувати рівняння (4.8), то отримаємо кінцевий результат:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(a, b, c, \dots, x_i)]^2 = \min. \quad (4.9)$$

Умова (4.9) використовується для знаходження оптимальних значень параметрів:  $a, b, c \dots$  тощо.



Рис. 4.4. "Обробка" за методом найменших квадратів

## 4.2. Приклади обробки різних типів функціональної залежності за методом найменших квадратів

### 4.2.1. Залежність $y = a \cdot x$

Рівняння прямої лінії, що проходить через початок координат, містить лише один параметр:

$$y = a \cdot x. \quad (4.10)$$

Основне рівняння методу найменших квадратів (4.9) у цьому випадку набуває вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i)^2 = \min. \quad (4.11)$$

Розглянемо використання рівняння (4.11) на конкретному чисельному прикладі.

*Приклад 4.1.* Знайти густину води ( $\rho$ , г/см<sup>3</sup>) із залежності  $m = \rho \cdot V$ , де  $m$  – маса (г),  $V$  – об'єм (см<sup>3</sup>). Дані наведено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Залежність маси ( $m$ ) води від її об'єму ( $V$ )

$V$ , см <sup>3</sup>	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000
$m$ , г	0,9658	1,9608	2,9367	3,9225	4,9038	5,8995

*Розв'язок.* Підставляючи в формулу (4.11) різні значення параметра  $a$  (у цьому випадку  $a = \rho$ ), отримаємо різні значення суми квадратів нев'язок  $S$  (табл. 4.2).

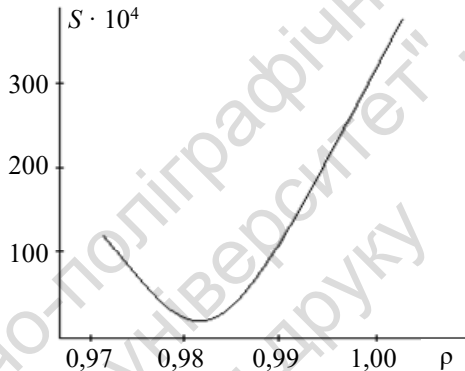
Потім будемо залежність суми квадратів нев'язок  $S$  від значення параметра  $\rho$  (рис. 4.5).

Точка мінімуму відповідає оптимальному значенню параметра  $\rho$ . Із точністю до 0,01  $\rho_{\text{опт}} = 0,98$ . Для знаходження наступного знаку необхідно розбити на менші частини інтервал між 0,98 і 0,99 тощо. Наведений метод дає можливість безпосередньо переконатися в тому, що сума квадратів нев'язок проходить через мінімум.

Таблиця 4.2

Результати розрахунків значень сум квадратів нев'язок ( $S$ )

$x$ $V, \text{ см}^3$	$y$ $m, \text{ г}$	$a_1 = \rho_1 = 1,00$	$a_2 = \rho_2 = 0,99$	$a_3 = \rho_3 = 0,98$	$a_4 = \rho_4 = 0,97$
		$(\varepsilon_i^I)^2 \cdot 10^4$	$(\varepsilon_i^{II})^2 \cdot 10^4$	$(\varepsilon_i^m)^2 \cdot 10^4$	$(\varepsilon_i^{IV})^2 \cdot 10^4$
1,0000	0,9658	11,6	5,8	2,0	0,1
2,0000	1,9608	15,3	3,6	0,0	4,3
3,0000	2,9367	40,0	11,0	0,1	7,1
4,0000	3,9225	60,0	14,0	0,0	18,0
5,0000	4,9038	92,5	21,3	0,1	28,9
6,0000	5,8995	101,0	16,4	3,8	63,2
$\Sigma$		$S_1 = 320,8$	$S_2 = 72,1$	$S_3 = 6,0$	$S_4 = 121,6$

Рис. 4.5. Залежність суми квадратів нев'язок ( $S$ ) від величини параметра ( $\rho$ )

Проте навіть для одного параметра послідовний підбір його оптимального значення є громіздкою процедурою. Для декількох параметрів ступінь складності зростає.

На практиці оптимальні значення параметра знаходять з умови екстремуму функції:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0. \quad (4.12)$$

Для прямої, яка проходить через початок координат, умову (4.12) можна записати:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i) \cdot (-x_i) = 0.$$

Звідки

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{[x \cdot y]}{[x^2]}. \quad (4.13)$$

У формулі (4.13) для скороченого запису сум використано так звані позначки Гаусса – знак суми й індекси опускаються, а замість них ставляться квадратні дужки.

Використаємо формулу (4.13) для розв'язування задачі, наведеної у прикладі 4.1.

*Приклад 4.2.* Знайти оптимальне значення параметра  $\rho$ , використовуючи дані наведеного вище прикладу.

*Розв'язок.* Дані, а також необхідні для розрахунків квадрати та перехрестні добутки наведено в табл. 4.3.

**Таблиця 4.3**

**Визначення густини ( $\rho$ ) води**

$x^2 = V_i^2$	$x = V_i$	$x \cdot y = V_i \cdot m_i$	$y = m_i$
1	1	0,9658	0,9658
4	2	3,9216	1,9608
9	3	8,8101	2,9367
16	4	15,6900	3,9225
25	5	24,5190	4,9038
36	6	35,3970	5,8995
$\Sigma = 91$		$\Sigma = 89,3095$	

$$\rho = \frac{89,3095}{91} = 0,981.$$

У цьому випадку отримали більш точне значення  $\rho_{\text{opt}}$ , ніж у попередньому розв'язку.

#### 4.2.2. Залежність $y = a \cdot x + b$

Рівняння прямої лінії:

$$y = a \cdot x + b. \quad (4.14)$$

Запишемо суму квадратів нев'язок для залежності (4.14):

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i - b)^2 = \min. \quad (4.15)$$

Для знаходження двох параметрів ("a" і "b") потрібно два рівняння. Їх отримуємо з таких умов:  $\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_b = 0$  і  $\left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)_a = 0$ , а саме:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_b = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i - b)(-x_i) = 0, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)_a = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i - b)(-1) = 0. \end{cases}$$

Нескладні перетворення дають:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n. \end{cases} \quad (4.16)$$

Уведемо позначки Гауса й отримаємо:

$$\begin{cases} a \cdot [x^2] + b \cdot [x] = [x \cdot y], \\ a \cdot [x] + b \cdot n = [y]. \end{cases} \quad (4.17)$$

Розв'язок двох рівнянь із двома невідомими знаходимо через детермінанти:

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{\begin{vmatrix} [x \cdot y] & [x] \\ [y] & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{vmatrix}} = \frac{n[x \cdot y] - [x][y]}{n[x^2] - [x]^2}. \quad (4.18)$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{\begin{vmatrix} [x^2] & [x \cdot y] \\ [x] & [y] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{vmatrix}} = \frac{[x^2][y] - [x][x \cdot y]}{n[x^2] - [x]^2}. \quad (4.19)$$



**Приклад 4.3.** Знайти параметри "a" і "b" для лінійної залежності, використовуючи масив даних, що наведено в табл. 4.4.

**Таблиця 4.4**

**Лінійна залежність**

$x_i$	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500
$y_i$	1,300	1,000	0,800	0,600	0,400	0,100

**Розв'язок.** Результати розрахунків наведені в табл. 4.5.

**Таблиця 4.5**

	$x_i^2$	$x_i$	$x_i \cdot y_i$	$y_i$	$y_i^2$
	0,000	0,000	0,000	1,300	1,690
	0,010	0,100	0,100	1,000	1,000
	0,040	0,200	0,160	0,800	0,640
	0,090	0,300	0,180	0,600	0,360
	0,160	0,400	0,160	0,400	0,160
	0,250	0,500	0,050	0,100	0,010
$\Sigma$	0,550	1,500	0,650	4,200	3,860

$$D = \begin{vmatrix} 0,55 & 1,5 \\ 1,5 & 6,0 \end{vmatrix} = 6,0 \cdot 0,55 - 1,5^2 = 1,050,$$

$$D_a = \begin{vmatrix} 0,65 & 1,5 \\ 4,2 & 6,0 \end{vmatrix} = 6,0 \cdot 0,65 - 1,5 \cdot 4,2 = -2,40,$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 0,55 & 0,65 \\ 1,5 & 4,2 \end{vmatrix} = 0,55 \cdot 4,2 - 1,5 \cdot 0,65 = 1,335.$$

Знаючи  $D$ ,  $D_a$ , і  $D_b$ , можна знайти параметри "a" і "b":

$$a = \frac{D_a}{D} = -\frac{2,400}{1,050} = -2,29,$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{1,335}{1,050} = 1,27.$$

### 4.2.3. Залежність $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Рівняння параболи має три параметри:  $a$ ,  $b$  і  $c$

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c. \quad (4.20)$$

Для суми квадратів нев'язок у випадку параболічної залежності отримуємо:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c)^2 = \min. \quad (4.21)$$

Для трьох параметрів  $(a, b, c)$  знаходимо три рівняння:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial a} \right)_{b,c} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c) \cdot (-x_i^2) = 0,$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial b} \right)_{a,c} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c) \cdot (-x_i) = 0,$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial c} \right)_{a,b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c) \cdot (-1) = 0.$$

Нескладні перетворення з введенням позначок Гаусса дають:

$$\begin{cases} a \cdot [x^4] + b \cdot [x^3] + c \cdot [x^2] = [x^2 \cdot y] \\ a \cdot [x^3] + b \cdot [x^2] + c \cdot [x] = [x \cdot y] \\ a \cdot [x^2] + b \cdot [x] + c \cdot n = [y] \end{cases} \quad (4.22)$$

$$a = \frac{D_a}{D}; \quad b = \frac{D_b}{D}; \quad c = \frac{D_c}{D}.$$

де

$$D = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & [x] \\ [x^2] & [x] & n \end{vmatrix},$$

а детермінанти  $D_a$ ,  $D_b$ , і  $D_c$  отримуються із  $D$  шляхом заміни від-

повідного стовпчика на стовпчик  $\begin{vmatrix} [x^2 \cdot y] \\ [x \cdot y] \\ [y] \end{vmatrix}$  вільних членів.

Розгляд рівнянь прямої і параболи показує, що число параметрів на одиницю перевищує степінь багаточлена. Це справедливо для будь-якого полінома. Коефіцієнти  $a, b, c, d \dots$  тощо в будь-який поліном входять лінійно (степені аргументу –  $x_i^n$  перетворюються в числа), тому застосування методу найменших квадратів до поліномів принципових труднощів не зустрічає. Для розрахунку параметрів у полінома  $n$ -степеня потрібно розв'язати  $(n+1)$  лінійних рівнянь із  $(n+1)$  невідомими (параметрами). Труднощі можуть виникати суто технічні під час розрахунку відповідних визначників, але їх успішно можна подолати із застосуванням комп'ютерної техніки.

### 4.3. Лінеаризація

Відносна простота та зручність обробки лінійної залежності методом найменших квадратів підказує зручний спосіб обробки нелінійних залежностей – попередня їх лінеаризація. Лінеаризація можлива, якщо число параметрів не більше двох.

У табл. 4.6 наведено ряд типових фізико-хімічних формул, які піддаються лінеаризації.

Конкретний приклад обробки даних із використанням лінеаризації розглянуто нижче.

*Приклад 4.4.* Визначити теплоту випаровування рідини ( $\Delta H_{\text{вип}}$ ) за залежністю тиску насиченої пари від температури

$\left( \frac{d \ln P}{dT} = \frac{\Delta H}{R \cdot T^2} \right)$ . Вихідні дані наведено в табл. 4.7.

*Розв'язок.*

Залежність тиску насиченої пари від температури має вигляд:

$$\frac{d \ln P}{dT} = \frac{\Delta H}{R \cdot T^2}.$$

Для того, щоб отримати лінійну залежність типу  $y = a \cdot x + b$ , потрібно розділити змінні і взяти невизначений інтеграл:

$$\int d \ln P = \frac{\Delta H}{R} \cdot \int \frac{1}{T^2} dT, \quad \ln P = -\frac{\Delta H}{R \cdot T} + \text{const.}$$

Таблиця 4.6

## Лінеаризація функцій

Фізичний зміст формули	Вихідна залежність	Лінеаризована формула	Змінні	Параметри
Рівняння реакції I-го порядку	$c = c_0 \cdot e^{-k_1 \cdot t}$	$\ln c = \ln c_0 - k_1 \cdot t$	$c$ – поточна концентрація, $t$ – час	$k$ – константа швидкості, $c_0$ – початкова концентрація
Рівняння реакції II-го порядку	$c = \frac{c_0}{1 + c_0 \cdot k_2 \cdot t}$	$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} + k_2 \cdot t$		
Рівняння Арреніуса	$k = k_0 \cdot e^{-\frac{E}{R \cdot T}}$	$\ln k = \ln k_0 - \frac{E}{R \cdot T}$	$k$ – константа швидкості, $T$ – температура	$E$ – енергія активації, $k_0$ – передекспонента
Адсорбційна ізотерма Ленгмюра	$a = a_m \frac{K \cdot p}{1 + K \cdot p}$	$\frac{p}{a} = \frac{1}{K \cdot a_m} + \frac{p}{a_m}$	$a$ – адсорбція, $p$ – тиск	$K$ – константа (адсорбційна) рівноваги, $a_m$ – адсорбція моношаром (максимальна)

Таблиця 4.7

## Залежність тиску насиченої пари від температури

$P$ , мм.рт.ст.	290	330	367	405	443	494	528
$T$ , К	307	311	313	316	318	320	323

З отриманої залежності видно, що  $y = \ln P$ , а  $x = \frac{1}{T}$ . Теплоту випаровування рідини ( $\Delta H_{\text{вип}}$ ) будемо шукати з параметра  $a$  лінійної залежності  $y = a \cdot x + b$ :

$$\Delta H = -R \cdot a.$$

Результати проміжних розрахунків наведені в табл. 4.8.

Таблиця 4.8

$P$ , мм.рт.ст	$T$ , К	$y = \ln P$	$x = \frac{10^3}{T}$	$x \cdot y$	$x^2 \cdot 10^{-6}$
290	307	5,669	3,257	0,0185	10,61
330	311	5,799	3,22	0,0187	10,37
367	313	5,905	3,19	0,0188	10,18
405	316	6,004	3,16	0,019	9,99
443	318	6,094	3,14	0,0191	9,86
494	320	6,2025	3,125	0,0194	9,77
528	323	6,269	3,1	0,0194	9,61
$\Sigma$		41,9426	22,192	0,1329	70,39

$$D = n \cdot [x^2] - [x]^2 = 7 \cdot 70,39 \cdot 10^{-6} - (22,192 \cdot 10^{-3})^2 = 0,245 \cdot 10^{-6},$$

$$D_a = n \cdot [x \cdot y] - [x] \cdot [y] =$$

$$= 7 \cdot 0,1329 - 22,192 \cdot 10^{-3} \cdot 41,9426 = -4,9 \cdot 10^{-4},$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{-4,9 \cdot 10^{-4}}{0,245 \cdot 10^{-6}} = -2000,$$

$$\Delta H = -R \cdot a = -8,31 \cdot (-2000) = 16620 \text{ Дж/моль} \approx 16,6 \text{ кДж/моль}.$$

Отже, лінеаризація і МНК дозволяють досить просто обробляти експериментальні дані та знаходити величини, які цікавлять. Проте, можливість лінеаризації не завжди вдається перетворити в дійсність, наприклад функцію  $y = a + e^{bx}$  не вдається лінеаризувати.

Якщо коефіцієнти входять у рівняння *нелінійно*, то завдання ускладнюється. Можливі шляхи її розв'язку такі.

За умови, що число параметрів не перевищує двох, найбільш ефективний підхід – лінеаризація (якщо така можлива).

Розглянутий на початку метод підбору оптимальних параметрів безпосередньою мінімізацією суми квадратів нев'язок, незважаючи на громіздкість, має одну перевагу – він не залежить від виду функціональної залежності. При двох параметрах (розв'язок задачі для одного параметра розглянуто вище) знаходиться "мінімум мінімум", оскільки це зображено на рис. 4.6, а саме, при вибраному " $b$ ", мінімізуємо за " $a$ "; потім те саме робимо при іншому значенні параметра –  $b_2$ , потім при  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $b_5$  тощо.

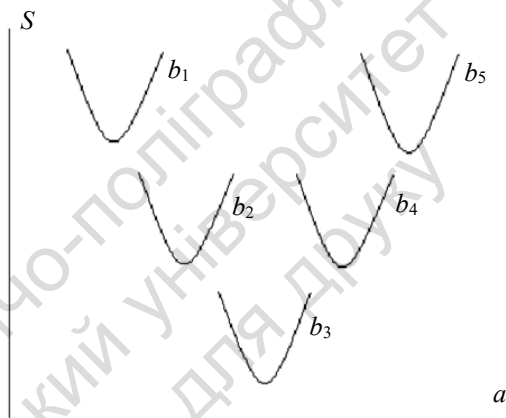


Рис. 4.6. Мінімум мінімум

Серед усіх мінімумів за " $a$ " знаходять самий глибокий, він і відповідає оптимальному значенню параметра " $b$ " (на рис. 4.6 –  $b_3$ ). Громіздкість подібного підходу вже при двох параметрах очевидна. Тому найчастіше для нелінійних (тих, що не можна лінеаризувати) залежностей використовують *метод розкладу в ряд за параметрами*, що розглянуто нижче.

## 4.4. Розклад у ряд за параметрами

На першій стадії методу параметри з тим, або іншим ступенем точності підбираються, тобто замість оптимальних значень  $a, b, c \dots$  тощо задаються їх наближеними значеннями:  $a_0, b_0, c_0 \dots$  тощо. Потім за методом найменших квадратів визначаються поправки  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ , які вважаються малими порівняно із самими параметрами. У цьому випадку різницю між точним  $y_i = \varphi(a, b, c \dots x_i)$  і наближеним  $y_i^0 = \varphi(a_0, b_0, c_0 \dots x_i)$  значеннями функції можна розкласти в ряд за поправками до параметрів і, урахувавши мале значення поправок, залишити лише перші степені розкладу, а саме:

$$\Delta y = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right)_{b, c, \dots, x_i} \cdot \Delta a + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial b} \right)_{a, c, \dots, x_i} \cdot \Delta b + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right)_{a, b, \dots, x_i} \cdot \Delta c + \dots \quad (4.23)$$

У рівняння (4.23) поправки входять лінійно і воно з погляду застосування методу найменших квадратів еквівалентно поліному  $(n - 1)$  ступеня, де  $n$  – число параметрів (і поправок до них відповідно).

Розглянемо два приклади застосування цього методу.

*Приклад 4.5.* Для лінійної залежності  $y = a \cdot x + b$ , що розглянуто у прикладі 4.3 вище, параметри "a" і "b" вже відомі, і можна розглядати цей приклад як тест.

*Розв'язок.* Проведемо наближено пряму  $y_0 = a_0 \cdot x + b_0$  через будь-які дві точки (ми взяли 1-шу і 6-ту).

Результати проміжних розрахунків наведені в табл. 4.9.

Таблиця 4.9

Визначення параметрів лінійної залежності методом розкладу в ряд за параметрами

№	$x_i^2$	$x_i$	$y_i$	$y_i^0$	$\Delta y_i$	$x_i \cdot \Delta y_i$
I	II	III	IV	V	VI	VII
1	0,000	0,000	1,300	1,300	0,000	0,000
2	0,010	0,100	1,000	1,060	-0,060	-0,006
3	0,040	0,200	0,800	0,820	-0,020	-0,004
4	0,090	0,300	0,600	0,580	0,020	0,006
5	0,160	0,400	0,400	0,340	0,060	0,024
6	0,250	0,500	0,100	0,100	0,000	0,000
$\Sigma$	0,550	1,500			0	0,020

Рівняння прямої, що проходить через точки з координатами  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  має вигляд:

$$\frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Підставляючи відповідні числові значення, отримаємо:

$$\frac{y_0 - 1,300}{0,10 - 1,300} = \frac{x - 0,0}{0,500 - 0,0} \longrightarrow y^0 = -\underbrace{2,400}_{a_0} \cdot x + \underbrace{1,300}_{b_0}. \quad (4.24)$$

Рівняння прямої (4.24) включає в себе приблизні значення параметрів:  $a_0 = -2,400$  і  $b_0 = 1,300$ . Підставляючи в рівняння (4.24) значення  $x_i$  отримуємо відповідне значення  $y_i^0$  і заносимо їх у табл. 4.9. (стовпчик V). Величини  $\Delta y_i = y_i - y_i^0$  наведено в наступному (VI-ому) стовпчику. Згідно з рівнянням (4.23):

$$\Delta y = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right)_b \cdot \Delta a + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial b} \right)_a \cdot \Delta b. \quad (4.25)$$

для рівняння прямої  $\varphi = a_0 \cdot x + b_0$  часткові похідні мають такі значення:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right)_b = x; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial b} \right)_a = 1.$$

Тоді рівняння (4.25) можна переписати:

$$\Delta y = x \cdot \Delta a + \Delta b. \quad (4.26)$$

Рівняння (4.26) містить два параметри  $\Delta a$  і  $\Delta b$  (поправки до приблизних значень параметрів) у першому степені й еквівалентно рівнянню прямої лінії.

Для знаходження поправок  $\Delta a$  і  $\Delta b$  потрібні два рівняння. Для лінійної залежності (як показано вище) потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta a \cdot [x^2] + \Delta b \cdot [x] = [x \cdot \Delta y], \\ \Delta a \cdot [x] + \Delta b \cdot n = [\Delta y]; \end{cases}$$

$$D = n \cdot [x^2] - [x]^2;$$

$$D = 6 \cdot 0,550 - 1,5^2 = 1,050;$$



$$\Delta a = \frac{D_{\Delta a}}{D} \quad \text{і} \quad \Delta b = \frac{D_{\Delta b}}{D};$$

$$D_{\Delta a} = n \cdot [x \cdot \Delta y] - [x] \cdot [\Delta y] = 6 \cdot 0,02 - 1,5 \cdot 0,0 = 0,120;$$

$$\Delta a = \frac{0,12}{1,05} = 0,114.$$

**Важливо!** Оскільки в табл. 4.9 значення  $\Delta y_i$  задавали так:

$$\Delta y_i = y_i - y_0,$$

з чого видно, що

$$y_i = y_0 + \Delta y_i,$$

то для знаходження істинного значення параметра  $a$  поправку потрібно додати до приблизного значення параметра:

$$a = a_0 + \Delta a = -2,400 + 0,114 = -2,29.$$

Якби  $\Delta y_i$  задавали по-іншому:

$$\Delta y_i = y_0 - y_i \Rightarrow y_i = y_0 - \Delta y_i,$$

Поправку потрібно було віднімати від приблизного значення параметра.

Знаходимо за МНК поправку до параметра  $b_0$ :

$$D_{\Delta b} = [x^2] \cdot [\Delta y] - [x] \cdot [x \cdot \Delta y] = 0,55 \cdot 0,00 - 0,020 \cdot 1,500 = -0,030,$$

$$\Delta b = -\frac{0,030}{1,050} = -0,029.$$

Істинне значення параметра  $b$  дорівнюватиме сумі приблизного  $b_0$  і поправки:  $b = b_0 + \Delta b = 1,300 - 0,029 = 1,27$ .

Отримані результати збігаються з параметрами  $a$  і  $b$ , що розраховані у прикладі 4.3.

*Приклад 4.6.* Знайти параметри  $a$  і  $b$  залежно  $y = a \cdot e^{-b \cdot x}$ , використовуючи дані, наведені в табл. 4.10.

*Розв'язок.* Знаходимо приблизні значення параметрів  $a_0$  і  $b_0$ , задаючись видом функціональної залежності  $y_0 = a_0 \cdot e^{-b_0 \cdot x}$  і підставляючи перші два значення  $x_i$  і  $y_i$ :

$$x_1 = 0,00; \quad y_1 = 2,01 \Rightarrow a_0 = 2,01;$$

$$x_2 = 1,00; \quad y_2 = 1,21 \Rightarrow 1,21 = 2,01 \cdot e^{-b_0} \Rightarrow b_0 = 0,5075.$$

Таблиця 4.10

## Обробка даних методом розкладу в ряд за параметрами

$x_i$	$y_i$	$y_i^0$	$\Delta y_i = y_i - y_i^0$	$x_i^2$
0,000	2,010	2,010	0	0
1,000	1,210	1,206	0,004	1
2,000	0,740	0,726	0,014	4
3,000	0,450	0,434	0,016	9

Розраховуємо значення  $y_i^0$  і заносимо в табл. 4.10. Також розраховуємо різниці між  $y_i$  і  $y_i^0$ :  $\Delta y_i = y_i - y_i^0$ . Шукаємо відповідні часткові похідні за кожним із параметрів і розраховуємо відповідні значення  $\alpha$  і  $\beta$ , заносимо їх у табл. 4.11:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_{b=b_0} = e^{-b_0 \cdot x} = \alpha; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_{\substack{a=a_0 \\ (b=b_0)}} = -a_0 \cdot x \cdot e^{-b_0 \cdot x} = \beta.$$

Таблиця 4.11

	$\alpha$	$\beta$	$\alpha^2$	$\beta^2$	$\alpha \cdot \beta$	$\alpha \cdot \Delta y$	$\beta \cdot \Delta y$
	1,000	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,600	-1,206	0,3600	1,4544	-0,7236	0,00240	-0,00432
	0,361	-1,451	0,1303	2,1054	-0,5238	0,00505	-0,02831
	0,216	-1,302	0,0467	1,6952	-0,2812	0,00345	-0,02083
$\Sigma$			1,5370	5,2550	-1,5286	0,01090	-0,04596

$$\Delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_{b=b_0} \cdot \Delta a + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_{a=a_0} \cdot \Delta b,$$

$$\Delta y = e^{-b_0 \cdot x} \cdot \Delta a - a_0 \cdot x \cdot e^{-b_0 \cdot x} \cdot \Delta b = \alpha \cdot \Delta a + \beta \cdot \Delta b.$$

Складаючи вираз для суми квадратів нев'язок ( $S$ ) і мінімізуючи його за  $\Delta a$  і  $\Delta b$  отримуємо:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial(\Delta a)}\right)_{\Delta b} = 2 \sum (\Delta y - \alpha \cdot \Delta a - \beta \cdot \Delta b) \cdot (-\alpha) = 0, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial(\Delta b)}\right)_{\Delta a} = 2 \sum (\Delta y - \alpha \cdot \Delta a - \beta \cdot \Delta b) \cdot (-\beta) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -[\alpha \cdot \Delta y] + [\alpha^2 \cdot \Delta a] + [\alpha \cdot \beta \cdot \Delta b] = 0, \\ -[\beta \cdot \Delta y] + [\alpha \cdot \beta \cdot \Delta a] + [\beta^2 \cdot \Delta b] = 0; \\ \begin{cases} [\alpha^2] \cdot \Delta a + [\alpha \cdot \beta] \cdot \Delta b = [\alpha \cdot \Delta y], \\ [\alpha \cdot \beta] \cdot \Delta a + [\beta^2] \cdot \Delta b = [\beta \cdot \Delta y]. \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь і знаходимо поправки до параметрів (відповідні суми повинні бути попередньо розраховані й занесені в табл. 4.11):

$$D = \begin{vmatrix} [\alpha^2] & [\alpha \cdot \beta] \\ [\alpha \cdot \beta] & [\beta^2] \end{vmatrix} = 1,5370 \cdot 5,2550 - [-1,5286]^2 = 5,7403,$$

$$D_{\Delta a} = \begin{vmatrix} [\alpha \cdot \Delta y] & [\alpha \cdot \beta] \\ [\beta \cdot \Delta y] & [\beta^2] \end{vmatrix} =$$

$$= 0,01090 \cdot 5,2550 - (-0,04596) \cdot (-1,5286) = -0,012975,$$

$$D_{\Delta b} = \begin{vmatrix} [\alpha^2] & [\alpha \cdot \Delta y] \\ [\alpha \cdot \beta] & [\beta \cdot \Delta y] \end{vmatrix} =$$

$$= 1,5370 \cdot (-0,04596) - (-1,5286) \cdot (0,01090) = -0,05398,$$

$$\Delta a = \frac{D_{\Delta a}}{D} = -\frac{0,012975}{5,7403} = -0,0023; \quad a = 2,0100 - 0,0023 \cong 2,01,$$

$$\Delta b = \frac{D_{\Delta b}}{D} = -\frac{0,05398}{5,7403} = -0,0094; \quad b = 0,5075 - 0,0094 \cong 0,50.$$

Залежність  $y = a \cdot e^{-b \cdot x}$  можна лінеаризувати:

$$\ln y = \ln a - b \cdot x.$$

Покажемо, що розв'язок задачі 4.6 шляхом лінеаризації приведе до такого самого результату.

*Приклад 4.7.* Знайти параметри  $a$  і  $b$  залежно  $y = a \cdot e^{-b \cdot x}$  за даними, наведеними в попередній задачі, використовуючи метод лінеаризації.

Розв'язок.

$$y = a \cdot e^{-b \cdot x};$$

$$\ln y = \ln a - b \cdot x;$$

$$y' = B - A \cdot x.$$

Таблиця 4.12

Обробка даних прикладу 4.6 методом лінеаризації

	$x$	$y$	$y' = \ln y$	$x^2$	$x \cdot y'$
	0,000	2,010	0,698	0,000	0,000
	1,000	1,210	0,191	1,000	0,191
	2,000	0,740	-0,301	4,000	-0,602
	3,000	0,450	-0,798	9,000	-2,394
$\Sigma$	6,000		-0,210	14,000	-2,805

$$A = \frac{n \cdot [x \cdot y'] - [x] \cdot [y']}{n \cdot [x^2] - [x]^2} = \frac{4 \cdot (-2,805) - 6 \cdot (-0,210)}{4 \cdot 14 - 36} =$$

$$= \frac{9,96}{20} = -0,498;$$

$$A = -b \Rightarrow b = 0,498 \approx 0,50;$$

$$B = \frac{[x^2] \cdot [y'] - [x] \cdot [y' \cdot x]}{n \cdot [x^2] - [x]^2} = \frac{14 \cdot (-0,210) - 6 \cdot (-2,805)}{20} =$$

$$= \frac{-2,940 + 16,830}{20} = \frac{13,890}{20} = 0,6945;$$

$$B = \ln a = 0,6945 \Rightarrow a = e^{0,6945} = 2,0027 \approx 2,00;$$

$$B = \ln a = 0,6945 \Rightarrow a = e^{0,6945} = 2,0027 \approx 2,00.$$

Отже, результати прикладів 4.6 і 4.7 збігаються в межах похибки експерименту. Метод лінеаризації є більш зручним і раціональним в обробці експериментальних даних, його переважно використовують, якщо функціональна залежність лінеаризується. Проте метод розкладу в ряд за параметрами є незамінним у разі, якщо функціональну залежність лінеаризувати не вдається.

## 4.5. Оцінка надійності параметрів

Після знаходження значень параметрів  $a, b, c \dots$  необхідно оцінити їхню точність, надійність.

Виведемо формулу для оцінки середньоквадратичної похибки параметра на прикладі параболи.

Для коефіцієнта  $a$  згідно з (4.21), (4.22) маємо:

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{\begin{vmatrix} [x^2 \cdot y] & [x^3] & [x^2] \\ [x \cdot y] & [x^2] & [x] \\ [y] & [x] & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & [x] \\ [x^2] & [x] & n \end{vmatrix}}. \quad (4.27)$$

За умовою методу найменших квадратів усі помилки зосереджені на функції ( $y$ ), тому для їхнього визначення необхідно більш детально розглянути детермінант  $D_a$ .

Уведемо детермінант ( $\Delta_i$ ):

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} x_i^2 [x^3] & [x^2] \\ x_i [x^2] & [x] \\ 1 [x] & n \end{vmatrix}. \quad (4.28).$$

Цей детермінант ( $\Delta_i$ ), як і визначник  $D$ , містить лише значення аргументу ( $x_i$ ), і, відповідно, вільний від помилок. Визначник  $D_a$  можна представити у вигляді:

$$D_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i & [x^3] & [x^2] \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i & [x^2] & [x] \\ \sum_{i=1}^n y_i & [x] & n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta_i. \quad (4.29)$$

Оцінимо дисперсію параметра "a":

$$\begin{aligned} \tilde{D}[a] &= \tilde{D}\left[\frac{D_a}{D}\right] = \tilde{D}\left[\frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta_i}{D}\right] = \frac{1}{D^2} \cdot \tilde{D}\left[\sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta_i\right] = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{D}[y_i \cdot \Delta_i]}{D^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \cdot \tilde{D}[y_i]}{D^2}. \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що символ  $D$  використовується для позначення як дисперсії, так і детермінантів, дисперсію (її оцінку) позначимо у вигляді квадрата середньоквадратичної помилки ( $\tilde{\sigma}_a^2$ ):

$$\tilde{D}[a] = \tilde{\sigma}_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \cdot \tilde{\sigma}_0^2}{D^2}. \quad (4.30)$$

У чисельник рівняння (4.30) входить  $\sum_{i=1}^n \Delta_i^2$ , розглянемо цю суму більш детально:

$$\begin{aligned} \Delta_i^2 &= \Delta_i \cdot \Delta_i = \Delta_i \cdot \begin{vmatrix} x_i^2 & [x^3] & [x^2] \\ x_i & [x^2] & [x] \\ 1 & [x] & n \end{vmatrix} = \Delta_i \cdot \begin{vmatrix} x_i^2 \cdot \Delta_i & [x^3] & [x^2] \\ x_i \cdot \Delta_i & [x^2] & [x] \\ \Delta_i & [x] & n \end{vmatrix}; \\ \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \Delta_i & [x^3] & [x^2] \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta_i & [x^2] & [x] \\ \sum_{i=1}^n \Delta_i & [x] & n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Розрахуємо кожну суму, що стоїть у першому стовпці, окремо:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & [x^3] & [x^2] \\ \sum_{i=1}^n x_i & [x^2] & [x] \\ n & [x] & n \end{vmatrix} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta_i = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^3 & [x^3] & [x^2] \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & [x^2] & [x] \\ \sum_{i=1}^n x_i & [x] & n \end{vmatrix} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \Delta_i = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^4 & [x^3] & [x^2] \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & [x^2] & [x] \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & [x] & n \end{vmatrix} = D.$$

Отже, рівняння (4.3) можна переписати з урахуванням вище описаного:

$$\tilde{\sigma}_a^2 = \frac{\begin{vmatrix} D & [x^3] & [x^2] \\ 0 & [x^2] & [x] \\ 0 & [x] & n \end{vmatrix}}{D^2} \cdot \tilde{\sigma}_0^2 = \frac{D \cdot A_{11}}{D^2} \cdot \tilde{\sigma}_0^2 = \frac{A_{11}}{D} \cdot \tilde{\sigma}_0^2. \quad (4.31)$$

де  $A_{11} = \begin{vmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{vmatrix}$  – алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{11}$

(в цьому випадку  $a_{11} = D$ ).

Отже, коефіцієнт перерахунку від нульової дисперсії ( $\tilde{\sigma}_0^2$ ) до дисперсії цього параметра ( $\tilde{\sigma}_a^2$ ) дорівнює частці алгебраїчного доповнення ( $A_{11}$ ) того діагонального елемента ( $a_{11}$ ) повного визначника ( $D$ ), який є коефіцієнтом при розглянутому параметрі, і повного визначника.

У випадку прямої лінії:

$$D = \begin{vmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{vmatrix}, \quad a_{11} = [x^2] \rightarrow A_{11} = n, \quad (4.32)$$

$$\tilde{\sigma}_a^2 = \frac{n}{D} \cdot \tilde{\sigma}_0^2.$$

Аналогічно розглянемо оцінку для параметра  $b$  параболічної залежності, який згідно з (4.21), (4.22) можна розрахувати:

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{\begin{vmatrix} [x^4] & [x^2 \cdot y] & [x^2] \\ [x^3] & [x \cdot y] & [x] \\ [y^2] & [y] & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & [x] \\ [x^2] & [x] & n \end{vmatrix}}. \quad (4.33)$$

У цьому випадку необхідно більш детально розглянути детермінант  $D_b$ , тому що саме в ньому присутній  $y$ , у якому (за припущенням) зосереджені всі помилки. Вводимо детермінант  $\Delta'_i$  так, щоб він був звільнений від помилок:

$$\Delta'_i = \begin{vmatrix} [x^4] & x_i^2 & [x^2] \\ [x^3] & x_i & [x] \\ [x^2] & 1 & n \end{vmatrix}. \quad (4.34)$$

Тоді  $D_b$  може бути представлений за аналогією з  $D_a$ :



$$D_b = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta'_i. \quad (4.35)$$

Оцінка дисперсія параметра "b" може розраховуватися:

$$\tilde{D}[b] = \tilde{D}\left[\frac{D_b}{D}\right] = \tilde{D}\left[\frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta'_i}{D}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta'_i)^2 \cdot \tilde{D}[y_i]}{D^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta'_i)^2 \cdot \tilde{\sigma}_0^2}{D^2}. \quad (4.36)$$

Розглянемо суму  $\sum_{i=1}^n (\Delta'_i)^2$  більш детально:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta'_i)^2 = \begin{vmatrix} [x^4] & \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \Delta'_i & [x^2] \\ [x^3] & \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta'_i & [x] \\ [x^2] & \sum_{i=1}^n \Delta'_i & n \end{vmatrix}.$$

Розраховуємо кожну суму, що стоїть у другому стовпці, окремо:

$$\sum_{i=1}^n \Delta'_i = \begin{vmatrix} [x^4] & \sum_{i=1}^n x_i^2 & [x^2] \\ [x^3] & \sum_{i=1}^n x_i & [x] \\ [x^2] & n & n \end{vmatrix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta'_i = \begin{vmatrix} [x^4] & \sum_{i=1}^n x_i^3 & [x^2] \\ [x^3] & \sum_{i=1}^n x_i^2 & [x] \\ [x^2] & \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = D;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \Delta'_i = \begin{vmatrix} [x^4] & \sum_{i=1}^n x_i^4 & [x^2] \\ [x^3] & \sum_{i=1}^n x_i^3 & [x] \\ [x^2] & \sum_{i=1}^n x_i^2 & n \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, рівняння (4.36) можна переписати з урахуванням вище описаного:

$$\tilde{\sigma}_b^2 = \frac{\begin{vmatrix} [x^4] & 0 & [x^2] \\ [x^3] & D & [x] \\ [x^2] & 0 & n \end{vmatrix}}{D^2} \cdot \tilde{\sigma}_0^2 = \frac{D \cdot A_{22}}{D^2} \cdot \tilde{\sigma}_0^2 = \frac{A_{22}}{D} \cdot \tilde{\sigma}_0^2. \quad (4.37)$$

де  $A_{22} = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^2] \\ [x^2] & n \end{vmatrix}$  – алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{22}$ .

У випадку прямої лінії:

$$a_{22} = n; \rightarrow A_{22} = [x^2]$$

та

$$\tilde{\sigma}_b^2 = \frac{[x^2]}{D} \cdot \tilde{\sigma}_0^2. \quad (4.38)$$

Оцінку параметра  $c$  у випадку параболічної залежності знаходять, виходячи з аналогічних міркувань. За аналогією можна записати:

$$\tilde{\sigma}_c^2 = \frac{\begin{vmatrix} [x^4] & [x^3] & 0 \\ [x^3] & [x^2] & 0 \\ [x^2] & [x] & D \end{vmatrix}}{D^2} \cdot \tilde{\sigma}_0^2 = \frac{D \cdot A_{33}}{D^2} \cdot \tilde{\sigma}_0^2 = \frac{A_{33}}{D} \cdot \tilde{\sigma}_0^2 \quad (4.39)$$

де  $A_{33} = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^3] \\ [x^3] & [x^2] \end{vmatrix}$  – алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{33}$ .

Нульова дисперсія у свою чергу визначається за формулою:

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{S}{n - m} \quad (4.40)$$

де  $S$  – розрахована вище сума квадратів нев'язок;  $n$  – число експериментальних точок;  $m$  – число параметрів.

Для прямо пропорційної залежності ( $y = a \cdot x$ , параметр  $b = 0$ , нульове значення параметра не означає його відсутність)  $m = 2$ ;

для лінійної залежності ( $y = a \cdot x + b$ )  $m = 2$ , для параболи ( $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ )  $m = 3$  тощо.

Величину суми квадратів нев'язок  $S$  можна визначати за формулою (4.9) безпосередньо, а також можна використовувати для розрахунку  $S$  уже розраховані значення сум. Виведемо формулу для розрахунку  $S$  у випадку полінома  $n$ -степеня:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(a, b, c \dots x_i)]^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n [y_i - a \cdot x_i^n - b \cdot x_i^{n-1} - c \cdot x_i^{n-2} - \dots]^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i^n - b \cdot x_i^{n-1} - c \cdot x_i^{n-2} - \dots) \cdot \\
 &\quad \cdot (y_i - a \cdot x_i^n - b \cdot x_i^{n-1} - c \cdot x_i^{n-2} - \dots) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \{ y_i \cdot (y_i - a \cdot x_i^n - b \cdot x_i^{n-1} - c \cdot x_i^{n-2} - \dots) - \\
 &\quad - a \cdot x_i^n (y_i - a \cdot x_i^n - b \cdot x_i^{n-1} - c \cdot x_i^{n-2} - \dots) - \\
 &\quad - b \cdot x_i^{n-1} (y_i - a \cdot x_i^n - b \cdot x_i^{n-1} - c \cdot x_i^{n-2} - \dots) - \dots \} = \\
 &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^n \cdot y_i - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{n-1} \cdot y_i - \\
 &\quad - c \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{n-2} \cdot y_i + \underbrace{\frac{a}{2} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial a} \right)_{b,c}}_0 + \underbrace{\frac{b}{2} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial b} \right)_{a,c}}_0 + \dots
 \end{aligned}$$

Для подальшого виведення врахуємо, що за оптимальних значень параметрів:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial S}{\partial a} \right)_{b,c} &= \sum_{i=1}^n 2 [y_i - a \cdot x_i^n - b \cdot x_i^{n-1} - c \cdot x_i^{n-2} - \dots] \cdot [-x_i^n] = 0; \\
 \left( \frac{\partial S}{\partial b} \right)_{a,c} &= \sum_{i=1}^n 2 [y_i - a \cdot x_i^n - b \cdot x_i^{n-1} - c \cdot x_i^{n-2} - \dots] \cdot [-x_i^{n-1}] = 0;
 \end{aligned}$$

тощо.

Тоді формула для розрахунку суми квадратів нев'язок може бути представлена рівнянням:

$$S = [y^2] - a \cdot [x^n \cdot y] - b \cdot [x^{n-1} \cdot y] - c \cdot [x^{n-2} \cdot y] - \dots \quad (4.41)$$

Для лінійної залежності ( $n = 1$ ), де  $n$  – степінь полінома:

$$S = [y^2] - a \cdot [x \cdot y] - b \cdot [y] \quad (4.42)$$

Для розрахунку суми квадратів нев'язок  $S$  за формулою (4.41) додатково необхідно розрахувати тільки суму  $[y^2]$ . Усі інші суми, а також параметри  $a$  і  $b$  вже відомі.

## Питання для самостійного повторення

*Замість крапок запишіть таке продовження тексту, щоб отримати правильне означення або твердження. Де можливо запишіть відповідну формулу.*

1. Нев'язкою називається...
2. Основним рівнянням методу найменших квадратів є ...
3. Основне рівняння методу найменших квадратів для прямо пропорційної залежності:  $y = a \cdot x$  ...
4. Основне рівняння методу найменших квадратів для лінійної залежності:  $y = a \cdot x + b$  ...
5. Основне рівняння методу найменших квадратів для параболи:  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  ...
6. Для чого використовується лінеаризація функціональних залежностей? За яких умов вона можлива?
7. Навести приклади залежностей, які неможливо лінеаризувати.
8. У чому суть методу розкладу в ряд за параметрами?
9. Пояснити різницю між поправкою до параметра і довірчим інтервалом.
10. Алгоритм побудови довірчого інтервалу для шуканого параметру такий...
11. Коефіцієнт перерахунку від нульової дисперсії до дисперсії параметра " $a$ " для лінійної залежності  $y = a \cdot x + b$  дорівнює...
12. Коефіцієнт перерахунку від нульової дисперсії до дисперсії параметра " $b$ " для лінійної залежності  $y = a \cdot x + b$  дорівнює...

13. Коефіцієнти перерахунку від нульової дисперсії до дисперсій параметрів "a", "b", "c" для параболи  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  відповідно дорівнюють...

14. Сума квадратів нев'язок розраховується за формулою...

15. Формула для розрахунку суми квадратів нев'язок для полінома 4-го степеня має вигляд...

## Задачі для самостійного розв'язку

1. Знайти параметри "a" та "c" для залежності  $y = c \cdot e^{a \cdot x}$

x	-0,60	-0,40	-0,10	0,00
y	24,80	23,80	22,44	22,00

2. Знайти параметри "a" та "b" для залежності  $y = b \cdot e^{a \cdot x}$

x	0,00	0,10	0,40	0,60
y	5,00	6,23	7,41	8,74

3. Знайти параметри a та b для залежності  $y = a \cdot x + b$  і побудувати довірчі інтервали для цих параметрів:

x	1,000	2,500	3,000	4,000	7,000
y	-0,505	3,060	4,170	7,380	15,050

4. Знайти параметри a та b для залежності  $y = a \cdot x + b$  і побудувати довірчі інтервали для цих параметрів:

x	1,000	1,200	2,000	3,000	3,500
y	3,050	2,800	1,100	0,300	-0,650

5. Серед запропонованих варіантів виберіть усі правильні відповіді. Відоме з курсу фізичної хімії рівняння Клапейрона – Клаузіуса в диференціальній формі має вигляд  $\frac{d \ln p}{dT} = \frac{\Delta H}{R \cdot T^2}$ . Лінеаризація цього рівняння і приведення його до виду  $y = b \cdot x + a$  дає можливість:

1) знайти  $\Delta H$  як  $R \cdot \text{tg} \alpha$  для залежності  $\ln p \sim f(T^2)$ ;

2) розрахувати  $\Delta H = -R \cdot \frac{n \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}$  за методом МНК після

лінеаризації в координатах  $\ln p \sim f(1/T)$ ;

3) розрахувати  $\Delta H$  із залежності  $\Delta H / R = \frac{n \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}$  за мето-

дом МНК після лінеаризації в координатах  $p \sim f(1/T)$ ;

4) знайти  $\Delta H$  із відсічної залежності  $\ln p \sim f(1/T^2)$ ;

5) знайти  $\Delta H$  як  $R \cdot \text{tg} \alpha$  для залежності  $p \sim f(T)$ ;

6) розрахувати  $\Delta H = -R \cdot \frac{[x^2] \cdot [y] - [x] \cdot [xy]}{[x]^2 - n \cdot [x^2]}$  за методом МНК після

лінеаризації в координатах  $\ln p \sim f(1/T^2)$ ;

7) знайти  $\Delta H$  як  $-R \cdot \text{tg} \alpha$  для залежності  $\ln p \sim f(1/T)$ .

6. Кінетичне рівняння  $n$ -порядку має такий вигляд:  $\frac{c^{1-n} - c_0^{1-n}}{n-1} = kt$ ,

де  $c_0$  – початкова концентрація,  $c$  – концентрація в момент часу  $t$ ,  $k$  – константа швидкості. У яких координатах це рівняння буде лінеаризуватися, якщо  $n=2$ ?

7. Виберіть усі правильні відповіді серед запропонованих. Залежність константи швидкості реакції від температури може бути представлена рівнянням  $k = k_0 \cdot e^{-\frac{E}{R \cdot T}}$ , де  $k_0$  – передекспоненційний множник, а  $E$  – енергія активації реакції ( $k_0$  і  $E/R$  – параметри). Лінеаризація цього рівняння і приведення його до виду  $y = a \cdot x + b$  дає можливість:

1) розрахувати  $E = -R \cdot \frac{n \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}$  за методом МНК для лінеа-

ризованої форми в координатах  $\ln k \sim f(1/T)$ ;

2) знайти  $E$  як  $R \cdot \text{tg} \alpha$  для залежності  $\ln k \sim f(T)$ ;

3) розрахувати  $E$  із залежності  $E / R = \frac{n \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}$  за методом

МНК;

4) знайти  $\ln k_0$  із відсічної залежності  $\ln k \sim f(1/T^2)$ ;

5) знайти  $E$  як  $-R \cdot \text{tg} \alpha$  для залежності  $\ln k \sim f(1/T)$ ;

6) знайти  $\ln k_0$  із відсічної залежності  $\ln k \sim f(1/T)$ .

8. Формула залежності швидкості реакції від порядку реакції за законом діючих мас може бути представлена рівнянням  $r = k \cdot C^n$ , де  $r$  – швидкість реакції,  $k$  – константа швидкості,  $n^*$  – порядок реакції. Лінеаризація цього рівняння і приведення його до виду  $y = ax + b$  дає можливість:

1) розрахувати порядок реакції за рівнянням  $n^* = \frac{n \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}$

за методом МНК і знайти константу швидкості із відсічної залежності  $\ln r \sim f(C)$ ;

2) знайти  $n^*$  як  $tg \alpha$ , а  $\ln k$  із відсічної залежності  $\ln r \sim f\left(\frac{1}{C}\right)$ ;

3) розрахувати  $n^*$  за рівнянням  $n^* = \frac{[x] \cdot [y] - n \cdot [x \cdot y]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}$  за методом

МНК, а  $\ln k$  знайти із відсічної залежності  $\ln r \sim f(\ln C)$ ;

4) знайти  $\ln k$  із тангенса кута нахилу залежності  $\ln r \sim f(\ln C)$ , а  $n^*$  із відсічної цієї залежності;

5) розрахувати  $n^* = \frac{n \cdot [x \cdot y] - [x] \cdot [y]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}$ , а  $\ln k = \frac{[x^2] \cdot [y] - [x] \cdot [x \cdot y]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}$

за методом МНК для залежності  $\ln r \sim f(\ln C)$ .

9. Знайти параметр  $a$  для залежності  $y = e^{a \cdot x}$  з даних, наведених у таблиці. Побудувати довірчий інтервал до знайденого параметра.

$x$	0	1	1,5	2
$y$	1	5,7546	13,8046	33,1155

10. Адсорбція оцтової кислоти з водних розчинів на активованому

вугіллі описується за допомогою рівняння Ленгмюра  $a = a_\infty \frac{K \cdot c}{1 + K \cdot c}$ ,

де  $K$  – константа рівноваги,  $a_\infty$  – гранична адсорбція ( $K$  і  $a_\infty$ , а також комбінації з цих величин можуть бути параметрами). Розрахувати питому поверхню активованого вугілля ( $S_{num}$ ), якщо питома поверхня

може розраховуватися за формулою:  $S_{num} = \frac{a_\infty \cdot N_a^{1/3} \cdot M^{2/3}}{\rho^{2/3}}$ , де  $M$  – молярна маса оцтової кислоти;  $\rho = 1,0491$  г/см<sup>3</sup>.

$a \cdot 10^3$ , моль/г	1,000	1,375	1,675	1,975	2,150
$c_p$ , моль/л	0,01	0,039	0,074	0,109	0,158

11. Визначити коефіцієнт розподілу ( $K$ ) оцтової кислоти ( $HAc$ ) між водною й органічною фазами, а також коефіцієнт, що характеризує ступінь асоціації ( $n$ ) з такої залежності концентрації оцтової кислоти у водній фазі від вмісту  $HAc$  в органічній фазі  $K = C_{вод} / C_{орг}^n$  ( $K$  і  $n$  і константи з них – параметри наведеної функціональної залежності).

$C(HAc)$ у воді, М	0,102	0,0802	0,062	0,042
$C(HAc)$ в орг. фазі, М	0,096	0,074	0,052	0,036

12. Зміна концентрації вихідної речовини з часом для реакції II-го порядку відбувається за таким кінетичним рівнянням:  $\frac{C_0 - C}{C_0 \cdot C} = k \cdot \tau$ ,

де  $C_0$  – початкова концентрація реагенту,  $C$  – поточна концентрація реагенту,  $\tau$  – час. Виходячи з експериментальних даних знайти початкову концентрацію вихідної речовини ( $C_0$ ), константу швидкості реакції ( $k$ ), а також концентрацію вихідної речовини через годину від початку реакції. Параметрами для цієї функціональної залежності вважати  $C_0$  і  $k$ .

$C$ , моль/л	2,000	1,905	1,818	1,754	1,667	1,626	1,527	1,429
$\tau$ , хв	0,5	5	10	14	20	23	31	40

13. Знайти параметри "а" та "b" для залежності  $y = a + e^{-b \cdot x}$ . Задачу розв'язати методом розкладу в ряд за параметрами.

$x$	0	1	3	5	7	10
$y$	11,0000	10,9806	10,9428	10,9049	10,8704	10,8307

14. Для побудови довірчих інтервалів параметрів для залежності  $y = a \cdot x^2$  необхідно знати нульову дисперсію. Виберіть формулу, за якою можна знайти нульову дисперсію:

$$1) \sigma_0^2 = \frac{[y^2] - a \cdot [y \cdot x^2]}{n-1}; \quad 2) \sigma_0^2 = \frac{[y^2] - a \cdot [y \cdot x^2]}{n-3};$$

$$3) \sigma_0^2 = \frac{[y^3] - a \cdot [y^2 \cdot x]}{n-3}; \quad 4) \sigma_0^2 = \frac{[y^2] - a \cdot [y \cdot x^2]}{n-2};$$

$$5) \sigma_0^2 = \frac{[y^2] + a \cdot [y \cdot x^2]}{n-2}.$$

15. Кількість речовини ( $y$ ) %, яка залишилася в системі через  $x$  хвилин після початку реакції задається рівнянням  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ . Знайти параметри  $a$ ,  $b$  і  $c$ , їхні довірчі інтервали.

$x$	7,000	12,000	17,000	22,000	27,000	32,000	37,000
$y$	83,700	72,900	63,200	54,700	47,500	41,400	36,300



#### Відповіді до задач розділу 4

1.  $a = -0,2$ ;  $c = 21,93$ ; 2.  $a = 0,84$ ;  $b = 5,31$ ; 3.  $a = 2,624$ ;  $b = -3,353$ ;  
4.  $a = -1,438$ ;  $b = 4,397$ ; 5. (2); (7); 7. (1); (5); (6); 8. (Д); 9.  $a = 1,75 \pm 0,01$ ;  
10.  $S_{num} = 300 \text{ м}^2/\text{Г}$ ; 11.  $n = 0,89$ ;  $K = 0,919$ ; 12.  $C_0 = 2,0 \text{ моль/л}$ ;  
 $k = 5,029 \cdot 10^{-3} \frac{\text{л}}{\text{моль} \cdot \text{хв}}$ ; 14. (2); 15.  $a = 0,023$ ,  $\Delta a = 0,001$ ;  $b = -2,61$ ,  
 $\Delta b = 0,05$ ;  $c = 100,8$ ,  $\Delta c = 0,5$ .

## РОЗДІЛ 5

# Основи теорії кореляції

### 5.1. Кореляційний момент

При обробці результатів за методом найменших квадратів передбачалось, що величини  $x$  і  $y$  пов'язані жорсткою функціональною залежністю. Інший полюс – це повна незалежність двох величин. Для цього випадку існує жорсткий критерій – за однією з властивостей дисперсії для незалежних величин  $y$  і  $x$  (див. розділ 2):

$$D[x + y] = D[x] + D[y]. \quad (5.1)$$

Між жорсткою функціональною залежністю та повною незалежністю між величинами існує гама інших залежностей, які називаються *кореляційними*. Наприклад, температура повітря в Києві не визначає температуру повітря у Варшаві, проте ці величини не можна вважати повністю незалежними: влітку і там, і там тепліше, взимку – холодніше, отже ці температури – *скорельовані*. Інший приклад, оцінки студентів (групи, курсу) з різних дисциплін не обумовлюють одна одну, але вони скорельовані: сильні студенти отримують більш високі оцінки, а слабші – низькі.

Мета теорії кореляції полягає в з'ясуванні характеру зв'язку між вибраними величинами: сильний, слабкий, відсутній.

Для пошуку кількісного критерію залежності між величинами можна відштовхуватися від дисперсії суми двох величин  $D[x + y]$ , не вимагаючи від величин  $x$  і  $y$  незалежності. Тоді отримуємо, використовуючи властивості дисперсії та математичного сподівання, а також формальну трактовку моментів як відповідних математичних сподівань:

$$\begin{aligned} D[x + y] &= M \{ [x + y] - M[x + y] \}^2 = \\ &= M \{ (x + y)^2 - 2(x + y) \cdot (m_x + m_y) + (m_x + m_y)^2 \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M\{x^2 + 2x \cdot y + y^2 - 2x \cdot m_x - 2x \cdot m_y - 2y \cdot m_x - 2y \cdot m_y + m_x^2 + \\
&+ 2m_x \cdot m_y + m_y^2\} = M\{(x^2 - 2m_x \cdot x + m_x^2) + (y^2 - 2m_y \cdot y + m_y^2) + \\
&\quad + 2(x \cdot y - m_x \cdot y - m_y \cdot x + m_x \cdot m_y)\} = \\
&= M\{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + 2(x - m_x) \cdot (y - m_y)\} = \\
&= M[(x - m_x)^2] + M[(y - m_y)^2] + \\
&\quad + 2M[(x - m_x) \cdot (y - m_y)] = D[x] + D[y] + 2K_{xy}.
\end{aligned}$$

Отже, без накладання умов незалежності між величинами  $x$  та  $y$  отримуємо для дисперсії суми:

$$D[x + y] = D[x] + D[y] + 2K_{xy}. \quad (5.2)$$

Величину  $K_{xy} = M[(x - m_x) \cdot (y - m_y)]$  називають центральним змішаним моментом, або *кореляційним моментом*.

Співставлення рівнянь (5.1) і (5.2) наводить на думку, що для незалежних величин  $x$  та  $y$  кореляційний момент повинен дорівнювати нулю.

Справді, для незалежних величин  $M[x \cdot y] = M[x] \cdot M[y]$ , тоді:

$$\begin{aligned}
K_{xy} &= M[(x - m_x) \cdot (y - m_y)] = M[x - m_x] \cdot M[y - m_y] = \\
&= \underbrace{\{M[x] - m_x\}}_0 \cdot \underbrace{\{M[y] - m_y\}}_0 = 0.
\end{aligned}$$

Якщо  $K_{xy} \neq 0$ , то це є свідченням наявності зв'язку між  $x$  та  $y$ .

Аналогічно тому, як паралельно дисперсії (центральний другий момент) існує другий початковий момент, так і паралельно кореляційному (центральний змішаний момент) існує *початковий змішаний момент*:

$$\beta_{11}[xy] = M[x \cdot y]. \quad (5.3)$$

Знайдемо зв'язок між  $K_{xy}$  і  $\beta_{11}[xy]$ :

$$\begin{aligned}
K_{xy} &= M[(x - m_x) \cdot (y - m_y)] = M[x \cdot y - m_x \cdot y - x \cdot m_y + m_x \cdot m_y] = \\
&= M[x \cdot y] - m_x \cdot M[y] - m_y \cdot M[x] + m_x \cdot m_y = \beta_{11}[xy] - m_x \cdot m_y,
\end{aligned}$$

отже,

$$\beta_{11}[xy] = K_{xy} + m_x \cdot m_y. \quad (5.4)$$

Формула (5.4) за своєю структурою схожа на формулу (2.39), яка показує зв'язок між  $D[x]$  та  $\alpha_2[x]$ .

На практиці замість  $K_{xy}$  та  $\beta_{11}[xy]$  використовують їхні статистичні аналоги:

$$K_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*) \cdot (y_i - m_y^*)}{n}, \quad (5.5)$$

$$\beta_{11}^*[xy] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n}. \quad (5.6)$$

## 5.2. Рівняння регресії

Використовуючи статистичні аналоги  $K_{xy}^*$  і  $\beta_{11}^*[xy]$  (5.5) та (5.6), перетворимо рівняння, що були отримані за методом найменших квадратів для лінійної залежності.

За формулою (4.16) маємо:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b \end{cases}$$

Розділимо обидві частини на  $n$ :

$$\begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n} = \frac{a \sum_{i=1}^n x_i^2}{n} + \frac{b \sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{a \sum_{i=1}^n x_i}{n} + b \end{cases}$$

Зробимо відповідні заміни:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad m_y^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}; \quad \alpha_2^*[x] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}; \quad \beta_{11}^*[xy] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n}.$$

та отримаємо:

$$\begin{cases} \beta_{11}^*[xy] = a \cdot \alpha_2^*[x] + b \cdot m_x^*, \\ m_y^* = a \cdot m_x^* + b. \end{cases}$$

Замість початкових моментів  $\alpha_2^*[x]$  і  $\beta_{11}^*[xy]$  вводимо центральні моменти  $D^*[x]$  та  $K_{xy}^*$ :

$$\begin{cases} K_{xy}^* + m_x^* \cdot m_y^* = a \cdot \left( D_x^* + (m_x^*)^2 \right) + b \cdot m_x^* \\ m_y^* = a \cdot m_x^* + b \end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему:

$$K_{xy}^* + a \cdot (m_x^*)^2 + b \cdot m_x^* = a \cdot D_x^* + a \cdot (m_x^*)^2 + b \cdot m_x^*,$$

$$K_{xy}^* = a \cdot D_x^*.$$

$$a = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*}$$

та

$$b = m_y^* - a \cdot m_x^* = m_y^* - \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} \cdot m_x^*.$$

Розглянемо рівняння  $y = a \cdot x + b$  і підставимо замість параметрів вирази, що отримано вище:

$$y_x = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} \cdot x + m_y^* - \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} \cdot m_x^*,$$

$$y_x - m_y^* = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} \cdot (x - m_x^*). \quad (5.7)$$

Рівняння (5.7) – це пряма, яка проходить через точку (M) із координатами  $(m_x^*; m_y^*)$  і має тангенс кута нахилу  $tg\alpha = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*}$

(рис. 5.1, пряма I). Рівняння (5.7) називається *рівнянням регресії*  $y$  за  $x$ . Відповідно, метод найменших квадратів часто називають *регресивним аналізом*. Рівняння (5.7) отримано, виходячи з умови, що всі помилки включені у величину  $y$ , а величина  $x$  визначена точно. Назвемо (5.7) рівнянням регресії  $y$  за  $x$ , де підстрочним індексом зафіксуємо умову точного значення аргументу ( $x$ ).

Якщо  $y$  і  $x$  пов'язані функціонально залежністю, то функцію й аргумент можна поміняти місцями, тобто можна записати:

$$x = c \cdot y + d.$$

Коефіцієнти  $c$  і  $d$  однозначно пов'язані з коефіцієнтами  $a$  та  $b$  залежності  $y = a \cdot x + b$  за відсутності помилок експерименту. За наявності помилок параметри  $c$  та  $d$  знаходяться з умови:

$$S = \sum_{i=1}^n [x_i - c \cdot y_i - d]^2 = \min \quad (5.8)$$

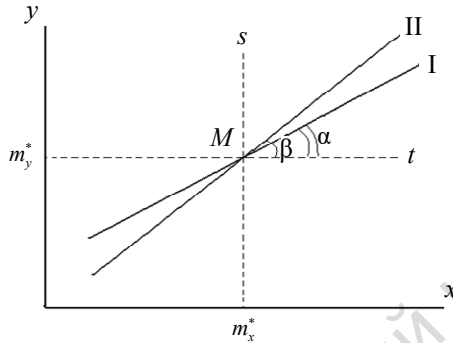
тобто зараз припускаємо, що всі помилки зосереджені в  $x$ . Мінімізуючи  $S$  за  $c$  та  $d$  і розв'язуючи відповідну систему лінійних рівнянь, отримуємо рівняння регресії  $x$  за  $y$ :

$$x_y - m_x^* = \frac{K_{xy}^*}{D_y^*} \cdot (y - m_y^*). \quad (5.9)$$

Рівняння (5.9) відповідає прямій, що проходить також, як рівняння регресії  $y$  за  $x$ , через точку ( $M$ ) з координатами ( $m_x^*$ ;  $m_y^*$ )

і має котангенс кута нахилу  $ctg\beta = \frac{K_{xy}^*}{D_y^*}$ , відповідно,  $tg\beta = \frac{D_y^*}{K_{xy}^*}$

(рис. 5.1, пряма II).



**Рис. 5.1. Рівняння регресії  $y$  за  $x$  (I) та  $x$  за  $y$  (II)**

Рівняння регресії набуває більш простого вигляду в координатах:

$$s = y - m_y^*$$

та

$$t = x - m_x^*,$$

тобто в системі координат, де початок координат перенесений у точку  $M$ .

На величину центральних моментів  $D_x^*$ ,  $D_y^*$ ,  $K_{xy}^*$  паралельне перенесення координат не впливає:

$$D_x^* = D_t^*;$$

$$D_y^* = D_s^*;$$

$$K_{xy}^* = K_{st}^*.$$

Рівняння регресії в координатах  $s - t$  має вигляд:

$$\begin{cases} s_t = \frac{K_{st}^*}{D_t^*} \cdot t = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} \cdot t \\ t_s = \frac{K_{st}^*}{D_s^*} \cdot s = \frac{K_{xy}^*}{D_y^*} \cdot s \end{cases} \quad (5.10)$$

Ці рівняння використовуються для знаходження меж коефіцієнта кореляції.

### 5.3. Коефіцієнт кореляції

Кореляційний момент  $K_{xy}$  має розмірність, яка дорівнює розмірності добутку випадкових величин  $x$  та  $y$ . Зручніше користуватися безрозмірною величиною, коефіцієнтом кореляції ( $r$ ):

$$r = \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x^* \cdot \sigma_y^*}. \quad (5.11)$$

Для незалежних величин  $x$  і  $y$  величина  $K_{xy}^* = 0$ , отже  $r = 0$ .

Знайдемо, чому дорівнює величина  $r$  для жорсткої функціональної залежності за відсутності помилок експерименту. У цьому випадку всі точки ідеально лягають на пряму лінію і прямі регресії I та II (рис. 5.1) повинні тотожно збігатися. Опускаючи підстрочні індекси в рівняннях (5.10), отримуємо:

$$s = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} \cdot t = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} \cdot \frac{K_{xy}^*}{D_y^*} \cdot s \rightarrow \rightarrow \frac{(K_{xy}^*)^2}{D_x^* \cdot D_y^*} = 1.$$

Добудемо квадратний корінь з обох частин рівняння й отримуємо:

$$\frac{(K_{xy}^*)^2}{D_x^* \cdot D_y^*} = 1 \rightarrow \rightarrow \frac{\sqrt{(K_{xy}^*)^2}}{\sqrt{D_x^* \cdot D_y^*}} = 1 \rightarrow \rightarrow \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x^* \cdot \sigma_y^*} = r = |r| = \pm 1.$$

Тобто жорсткій функціональній залежності відповідає значення  $r = \pm 1$ .

У загальному вигляді:

$$0 \leq |r| \leq 1. \quad (5.12)$$

Наближення  $r$  до одиниці відповідає функціональній залежності; нулю – відсутності лінійної залежності; проміжне значення  $r$  вказує на наявність кореляційної залежності. "Міцність" зв'язку визначається величиною  $r$ : чим менше значення  $r$ , тим слабший зв'язок між величинами  $x$  та  $y$ .

Коефіцієнту кореляції  $r$  можна дати графічну інтерпретацію (рис. 5.1):



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} \text{ (пряма I),}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{D_y^*}{K_{xy}^*} \text{ (пряма II).}$$

Відповідно:

$$r = \frac{K_{xy}^*}{\sqrt{D_x^*} \cdot \sqrt{D_y^*}} = \sqrt{\frac{K_{xy}^* \cdot K_{xy}^*}{D_x^* \cdot D_y^*}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}}, \quad (5.13)$$

тобто, чим більше розходяться між собою рівняння регресії (рис. 5.1), тим менший коефіцієнт кореляції.

Визначимо коефіцієнт кореляції аналітичним методом:

$$\begin{aligned} r &= \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x^* \cdot \sigma_y^*} = \frac{\beta_{11}^* [xy] - m_x^* \cdot m_y^*}{\sqrt{\left\{ \alpha_2^* [x] - (m_x^*)^2 \right\} \left\{ \alpha_2^* [y] - (m_y^*)^2 \right\}}} = \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right) \left( \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)^2 \right)}}. \end{aligned}$$

Помножимо чисельник і знаменник на  $n^2$  та введемо позначки Гаусса:

$$r = \frac{n \cdot [x \cdot y] - [x] \cdot [y]}{\sqrt{n \cdot [x^2] - [x]^2} \cdot \sqrt{n \cdot [y^2] - [y]^2}}. \quad (5.14)$$

**Приклад 5.1.** Знайти коефіцієнт кореляції для даних, наведених в табл. 5.1

**Таблиця 5.1**

**Вихідні дані для розрахунку коефіцієнта кореляції**

	$x_i$	$x_i y_i$	$y_i$
	1	1	1

	1	3	3
	5	5	1
	5	15	3
<b>Σ</b>	12	24	8

Розв'язок.

$$m_x^* = \frac{[x]}{n} = \frac{12}{4} = 3; \quad \beta_{11}^*[xy] = \frac{[xy]}{n} = \frac{24}{4} = 6;$$

$$m_y^* = \frac{[y]}{n} = \frac{8}{4} = 2; \quad K_{xy}^* = \beta_{11}^*[xy] - m_x^* \cdot m_y^* = 6 - 6 = 0 \rightarrow r = 0,$$

тобто кореляція відсутня.

Рівняння регресії в цьому випадку має вигляд:

$$\begin{cases} y_x - 2 = 0 & \text{(I),} \\ x_y - 3 = 0 & \text{(II).} \end{cases}$$

Із даних, наведених на рис. 5.2, бачимо, що в цьому випадку прямі регресії перпендикулярні одна одній, тобто використання регресивного аналізу за відсутності кореляції не має сенсу.

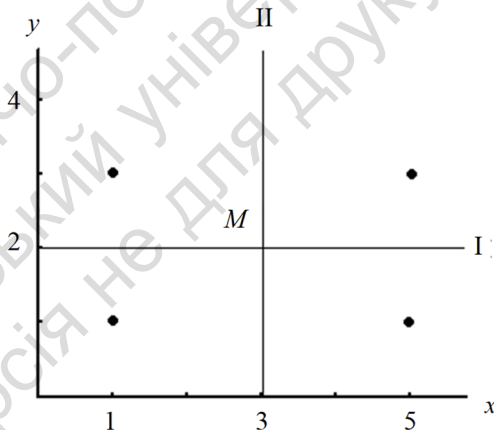


Рис. 5.2. Прямі регресії  $y_x$  (I) і  $x_y$  (II) за відсутності кореляції між  $x$  та  $y$

*Приклад 5.2.* Знайти кореляційний коефіцієнт для масиву даних, наведених в табл. 5.2.

*Таблиця 5.2*

*Вихідні дані для розрахунку коефіцієнта кореляції*

№	$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$
1	1	2	2	1	4
2	2	1	2	4	1
3	2	3	6	4	9
4	2	4	8	4	16
5	3	3	9	9	9
6	3	6	18	9	36
7	4	2	8	16	4

*Закінчення табл. 5.2*

№	$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$
8	4	4	16	16	16
9	4	6	24	16	36
10	4	8	32	16	64
11	6	3	18	36	9
12	6	4	24	36	16
13	6	6	36	36	36
14	6	8	48	36	64
15	6	9	54	36	81
$\Sigma$	59	69	305	275	401

*Розв'язок.*

$$\alpha_2^*[x] = \frac{275}{15} = 18,3; \quad m_x^* = \frac{59}{15} = 3,9; \quad \beta_{11}^*[xy] = \frac{305}{15} = 20,3$$

$$m_y^* = \frac{69}{15} = 4,6; \quad \alpha_2^*[y] = \frac{401}{15} = 26,7;$$

$$D^*[x] = 18,3 - 3,9^2 = 3,09; \quad K_{xy}^* = 20,3 - 3,9 \cdot 4,6 = 2,36$$

$$D^*[y] = 26,7 - 4,6^2 = 5,54;$$

$$\sigma_x^* = \sqrt{3,09} = 1,76; \quad \sigma_y^* = \sqrt{5,54} = 2,35; \quad r = \frac{2,36}{1,76 \cdot 2,35} = 0,57.$$

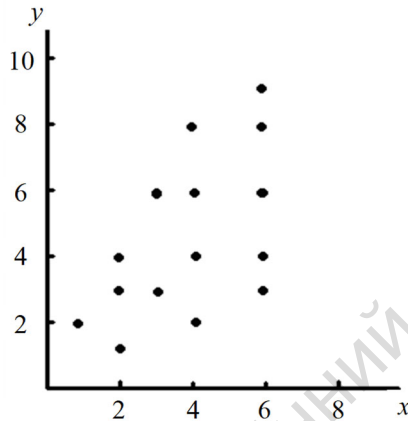


Рис. 5.3. Масив даних для прикладу 5.2

У цьому випадку між величинами  $x$  та  $y$  існує не функціональна, а кореляційна залежність середньої сили. Це наглядно бачимо з даних, наведених на рис. 5.3. Спостерігається тенденція до зростання  $y$  із збільшенням  $x$  ( $r = 0,57$ ). Як видно з рис. 5.3 характерна для функціональної залежності лінія перетворюється на широку розмиту смугу.

## 5.4. Нелінійна кореляція

Усе, що було сказано вище, стосується так званої *лінійної кореляції*. Значення  $r \rightarrow |1|$  вказує на лінійну функціональну залежність, проте відсутність кореляції ( $r \rightarrow 0$ ) не дає гарантії повної незалежності: виключається лише лінійний зв'язок між  $x$  і  $y$ . Водночас може існувати нелінійний зв'язок між величинами  $x$  та  $y$ .

У випадку, якщо між  $x$  і  $y$  передбачається нелінійна залежність, для її характеристики (визначення "сили" зв'язку) використовується *кореляційне відношення* ( $\theta$ ):

$$\theta = \sqrt{1 - \frac{S}{S_y}}, \quad (5.15)$$

де  $S = \sum_{i=1}^n [y_i - \phi(a, b, c, \dots, x_i)]^2$  – відома сума квадратів нев'язок

для відповідного рівняння регресії:

$$S_y = D_y^* \cdot n = \sum_{i=1}^n [y_i - m_y^*]^2 .$$

За умови  $S = 0$  усі точки ідеально лягають на відповідну криву,  $\theta = 1$ , тож отримуємо випадок жорсткої функціональної залежності.

Величина  $S_y$  характеризує розкид ординат навколо  $m_y^*$ . У випадку лінійної залежності за відсутності кореляції ( $K_{xy}^* = 0$ ) рівняння регресії представляє собою пряму ( $y_x$ ), що розташована на відстані  $y = m_y^* = b$  від осі абсцис і паралельна їй (див. приклад 5.1).

У цьому випадку для суми квадратів нев'язок отримуємо:

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - a \cdot x_i - b]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - b]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - m_y^*]^2 = S_y .$$

При  $S = S_y$ ,  $\theta = 0$ . Це положення зберігається і для нелінійної залежності.

Отже, межі для кореляційного відношення  $\theta$  ( $0 \leq |\theta| \leq 1$ ) такі ж самі, що і для лінійного коефіцієнта кореляції.

У випадку лінійної залежності  $\theta$  та  $r$  тотожно збігаються. Покажемо це.

Відповідно до формули (4.35) і (4.36) для лінійної залежності:

$$\begin{aligned} S &= [y^2] - a[x \cdot y] - b[y] = n \left\{ \frac{[y^2]}{n} - a \frac{[x \cdot y]}{n} - b \frac{[y]}{n} \right\} = \\ &= n \{ \alpha_2^* [y] - a \cdot \beta_{11}^* [xy] - b \cdot m_y^* \} = \\ &= n \left\{ D_y^* + (m_y^*)^2 - a \cdot K_{xy}^* - a \cdot m_x^* \cdot m_y^* - b \cdot m_y^* \right\}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $a = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*}$  та  $m_y^* = a \cdot m_x^* + b$ , отримуємо:

$$\begin{aligned}
 S &= n \left\{ D_y^* - \frac{(K_{xy}^*)^2}{D_x^*} + m_y^* [m_y^* - a \cdot m_x^* - b] \right\} = \\
 &= n \cdot D_y^* \left\{ 1 - \frac{(K_{xy}^*)^2}{D_x^* \cdot D_y^*} \right\} = S_y (1 - r^2), \\
 \theta &= \sqrt{1 - \frac{S}{S_y}} = \sqrt{1 - (1 - r^2)} = r.
 \end{aligned}$$

Розглянемо приклад розрахунку  $\theta$  для нелінійної залежності – параболі.

*Приклад 5.3.* Перевіримо, чи може бути параболічна залежність функціональною, якщо значення параметрів:  $a = 0,0233809$ ;  $b = -2,606619$ ;  $c = 100,79114$ , а значення відповідних сум  $[x^2 \cdot y] = 186054,3$ ;  $[x \cdot y] = 7688,9$ ;  $[y] = 399,7$ ;  $[y^2] = 24594,33$ , кількість експериментальних даних  $n = 7$ .

*Розв'язок.* Для розв'язку цієї задачі необхідно обрахувати кореляційне відношення  $\theta$ .

Для параболі відповідно до формули (4.35) отримуємо:

$$\begin{aligned}
 S &= [y^2] - a[x^2 \cdot y] - b[x \cdot y] - c[y] \\
 S &= 24594,33 - 0,0233809 \cdot 186054,3 + 2,606619 \cdot 7688,9 - \\
 &\quad - 100,79114 \cdot 399,70 = 0,0272;
 \end{aligned}$$

Додатково обраховуємо:

$$S_y = D_y^* \cdot n = \left\{ \alpha_2^*[y] - (m_y^*)^2 \right\} \cdot n = \left\{ \frac{[y^2]}{n} - \left( \frac{[y]}{n} \right)^2 \right\} \cdot n = [y^2] - \frac{[y]^2}{n}$$

$$S_y = 24594,33 - \frac{399,7^2}{7} = 1771,5$$

$$\theta = \sqrt{1 - \frac{S}{S_y}} = \sqrt{1 - \frac{0,0272}{1771,5}} = 0,99999.$$

Отже, ця параболічна залежність є жорстко функціональною.

Підсумовуючи, відмітимо, що відносно невисокі значення  $\theta$  можуть бути і в тому випадку, коли функціональна залежність існує, але експериментальні дані за рахунок впливу випадкових факторів дуже розкидані, неякісні.

## 5.5. Кореляційний момент і коефіцієнт кореляції для двовимірної випадкової величини

Важливими чисельними характеристиками двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  є *коваріація* (або *кореляційний момент*) і *коефіцієнт кореляції*, які певною мірою відіграють роль показників взаємозв'язку між компонентами  $X$  і  $Y$ .

*Коваріацією (кореляційним моментом)* двовимірної випадкової величини  $(x, y)$  називається математичне сподівання добутку відхилень складових цієї величини від їхніх математичних сподівань:

$$K_{xy} = M\{[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\}. \quad (5.16)$$

Використовуючи означення математичного сподівання, одержимо:

- для дискретного розподілу

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)] \cdot p(x_i, y_j) \quad (5.17)$$

- для неперервного розподілу

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)] \cdot f(x, y) dx dy \quad (5.18)$$

Коваріацію  $K_{xy}$  часто зручно виражати співвідношенням:

$$K_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y), \quad (5.19)$$

що можна отримати із формул (5.3) і (5.4), а також зі співвідношення (5.16) безпосередніми обчисленнями з урахуванням властивостей математичного сподівання:

$$\begin{aligned}
 K_{xy} &= M[X \cdot Y - X \cdot M(Y) - Y \cdot M(X) + M(X) \cdot M(Y)] = \\
 &= M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) - M(Y) \cdot M(X) + M(X) \cdot M(Y) = \\
 &= M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y).
 \end{aligned}$$

Формула (5.19) у випадках дискретного й неперервного розподілів набуває вигляду:

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j) - M(X) \cdot M(Y), \quad (5.20)$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy - M(X) \cdot M(Y). \quad (5.21)$$

Для незалежних випадкових величин коваріація дорівнює нулю. Це твердження є простим наслідком співвідношення (5.19), тому що математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добуткові математичних сподівань цих величин.

Коваріація двох випадкових величин  $(x, y)$  крім характеру залежності випадкових величин, характеризує їхнє розсіювання навколо точки з координатою  $(M(X), M(Y))$  на площині.

Для отримання безрозмірної величини, до того ж такої, яка характеризує лише залежність між випадковими величинами, а не їх розсіювання, вводиться поняття коефіцієнта кореляції (рівняння 5.11):

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Величина  $r_{xy}$  характеризує ступінь залежності випадкових величин  $X$  і  $Y$ , до того ж не будь-якої залежності, а лише лінійної, яка проявляється в тому, що зі зростанням однієї випадкової величини друга має тенденцію також зростати, якщо  $r_{xy} > 0$  (додатня кореляційна залежність), або спадати, якщо  $r_{xy} < 0$  (від'ємна кореляційна залежність).

Дві випадкові величини  $X$  і  $Y$  називаються **корельованими**, якщо коваріація  $K_{xy} \neq 0$  (або коефіцієнт кореляції  $r_{xy} \neq 0$ ),



і *некорельованими*, якщо коваріація  $K_{xy} = 0$  (або коефіцієнт кореляції  $r_{xy} = 0$ ).

Легко переконатись, що дві корельовані випадкові величини є також залежні. Обернене твердження правильне не завжди, тобто, якщо дві випадкові величини залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими.

*Приклад 5.4.* Обчислити  $K_{xy}$  і  $r_{xy}$  для двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$ , яка задана густиною задачі 2.19. Зробити висновок про корельованість її компонент.

*Розв'язок.* Для розрахунків скористаємось числовими характеристиками, що були знайдені в задачі 2.19.

$$M(X) = M(Y) = \frac{7}{12};$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\sqrt{11}}{12};$$

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy - M(X) \cdot M(Y) = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y \cdot (x + y) dx dy - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \\ &= \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 y dy + \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y^2 dy - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}; \\ r_{xy} &= \frac{-1/144}{\sqrt{11}/12 \cdot \sqrt{11}/12} = -\frac{1}{11} \approx -0,09. \end{aligned}$$

Оскільки  $r_{xy} < 0$ , то між величинами  $X$  і  $Y$  існує від'ємна кореляційна залежність.

*Приклад 5.5.* Двовимірна випадкова величина задана густиною:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Обчислити  $K_{xy}$  і  $r_{xy}$  і зробити висновок про корельованість компонент випадкової величини.

*Розв'язок.* З'ясуємо питання про залежність  $X$  і  $Y$ :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1; 1];$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, \quad y \in [-1; 1];$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \neq f_1(x) \cdot f_2(y),$$

що свідчить про залежність компонент  $X$  і  $Y$ .

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} dx = 0$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2(y) dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 y \cdot \sqrt{1-y^2} dy = 0,$$

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)] \cdot f(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 x dx \cdot \int_{-1}^1 y dy = 0. \end{aligned}$$

$K_{xy} = r_{xy} = 0$ , тобто випадкові величини  $X$  і  $Y$  некорельовані й залежні.

## Питання для самостійного повторення

*Замість крапок запишіть таке продовження тексту, щоб отримати правильне означення або твердження. Де можливо запишіть відповідну формулу.*

1. Кореляційними називаються функціональні залежності ...
2. Кореляційним моментом називається ...

3. Початковий змішаний момент може бути записаний ... і пов'язаний з центральним змішаним моментом наступним співвідношенням ...
4. Рівнянням регресії  $y$  за  $x$  можна записати як ...
5. Коефіцієнт кореляції можна записати як ... і межі його визначення дорівнюють ...
6. Коефіцієнту кореляції  $r$  можна дати графічну інтерпретацію ...
7. Коефіцієнт кореляції можна визначити аналітичним методом за формулою ...
8. Кореляційне відношення можна визначити як ...
9. Для незалежних випадкових величин коваріація дорівнює ...
10. Дві випадкові величини  $X$  і  $Y$  називаються корельованими, якщо ... і некорельованими, якщо ...

## Задачі для самостійного розв'язку

1. Знайти коефіцієнт кореляції для залежності  $y = a \cdot x + b$ , якщо значення  $x$  та  $y$  наведені в таблиці:

$x$	1,000	2,500	3,000	4,000	7,000
$y$	-0,505	3,060	4,170	7,380	15,050

2. Знайти коефіцієнт кореляції для залежності  $y = a \cdot x + b$ , якщо значення  $x$  та  $y$  наведені в таблиці:

$x$	1,000	1,200	2,000	3,000	3,500
$y$	3,050	2,800	1,100	0,300	-0,650

3. Кількість речовини ( $y$ ) %, яка залишилася в системі через  $x$  хвилин після початку реакції задається рівнянням  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ . Знайти кореляційне відношення  $\theta$  для цієї залежності.

$x$	7,000	12,000	17,000	22,000	27,000	32,000	37,000
$y$	83,700	72,900	63,200	54,700	47,500	41,400	36,300

4. Імовірність того, що під час перевірки деталей виявиться стандартною, дорівнює 0,8. Перевірці підлягають три деталі. Побудувати закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин  $x$  – поява числа бракованих деталей і  $y$  – поява числа стандартних деталей. Обчислити  $K_{xy}$  і  $r_{xy}$ .

5. Двовимірною неперервною випадковою величиною  $(x, y)$  задана густиною:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

де  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ . Обчислити  $K_{xy}$  і  $r_{xy}$  та зробити висновок про корельованість її компонент.

6. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини  $(x, y)$  задано таблицею:

$y_j \backslash x_i$	-2	4	6
3	1,7a	2,2a	2,1a
5	0,3a	1,8a	1,9a

Обчислити  $K_{xy}$  і  $r_{xy}$  та зробити висновок про корельованість її компонент.

### Відповіді до задач розділу 5

1.  $r = 0,999$ ; 2.  $r = -0,988$ ; 3.  $\theta = 0,9999$ ; 4.  $K_{xy} = -0,48$ ;  $r_{xy} = -1$ ;

5.  $K_{xy} = -\frac{1}{144}$ ;  $r_{xy} = -\frac{1}{11}$ ; 6.  $K_{xy} = 0,72$ ;  $r_{xy} = 0,25$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гмурман В. Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1963. – 238 с.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Высшая школа, 2001. – 576 с.
3. Румшицкий Л.З. Элементы теории вероятностей / Л. З. Румшицкий. – М. : Наука, 1970. – 256 с.
4. Вишневский Л. Д. Математическая статистика и случайные процессы / Л. Д. Вишневский и др. – К. : Вища школа, 1992. – 143 с.
5. Анісімов В. В. Математична статистика / В. В. Анісімов, О. І. Черняк – К. : Леся, 1995. – 104 с.
6. Воскобойников Ю. Е. Математическая статистика / Ю. Е. Воскобойников, Е. И. Тимошенко. – Новосибирск : НГАСУ, 2000. – 116 с.
7. Білушак Г. І. Теорія ймовірностей і математична статистика / Г. І. Білушак та ін. – Л. : Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2003. – 244 с.
8. Асеев Г. Г. Теорія ймовірностей та математична статистика / Г. Г. Асеев та ін. – Х. : ХДАК, 2004. – 89 с.
9. Бобик О. І. Теорія ймовірностей і математична статистика / О. І. Бобик та ін. – К. : ВД "Професіонал", 2007. – 560 с.

# ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	3
------------------------	---

<b>КОРОТКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ</b> .....	5
--	---

## РОЗДІЛ 1

<b>Основні поняття теорії ймовірностей</b> .....	11
1.1. Подія та ймовірність її появи .....	11
1.2. Статистична частота .....	16
1.3. Складні події. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Повна група подій .....	18
1.4. Принцип практично неможливої малоймовірної події ...	22
1.5. Складні події. Теорема множення ймовірностей .....	23
1.6. Складні події. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Формула повної ймовірності .....	30
1.7. Ймовірність гіпотез. Теорема Баєса .....	33
1.8. Теорема про повторення дослідів. Формула Бернуллі ....	35
<i>Питання для самостійного повторення</i> .....	40
<i>Задачі для самостійного розв'язку</i> .....	42
<i>Відповіді до задач розділу 1</i> .....	45

## РОЗДІЛ 2

<b>Випадкова величина та її властивості</b> .....	47
2.1. Визначення випадкової величини. Біноміальний закон розподілення .....	47
2.2. Закон розподілення Пуассона .....	53
2.3. Геометричний розподіл .....	57
2.4. Неперервна випадкова величини .....	58
2.4.1. Функція розподілу ймовірностей .....	59
2.4.2. Густина (щільність) розподілу ймовірностей .....	60
2.4.3. Рівномірний закон розподілу .....	62
2.5. Математичне сподівання випадкової величини .....	64
2.6. Дисперсія випадкової величини .....	71
2.7. Формула Лапласа .....	80
2.8. Нормальний закон розподілення .....	81

2.9. Двовимірна випадкова величина .....	91
2.9.1. Залежні і незалежні випадкові величини. Умовні закони розподілу .....	99
2.9.2. Чисельні характеристики двовимірних випадкових величин .....	108
<i>Питання для самостійного повторення .....</i>	113
<i>Задачі для самостійного розв'язку .....</i>	115
<i>Відповіді до задач розділу 2 .....</i>	119

### **РОЗДІЛ 3**

<b>Теорія помилок .....</b>	120
3.1. Оцінки числових характеристик. Рівноточні вимірювання .....	120
3.2. Пошук грубих помилок .....	126
3.3. Довірчий інтервал .....	128
3.4. Оцінювання систематичної похибки .....	134
3.5. Нерівноточні вимірювання .....	142
3.6. Сумісність результатів досліджень .....	150
3.7. Урахування довірчого інтервалу в записі остаточного результату вимірювання .....	153
<i>Питання для самостійного повторення .....</i>	155
<i>Задачі для самостійного розв'язку .....</i>	156
<i>Відповіді до задач розділу 3 .....</i>	160

### **РОЗДІЛ 4**

<b>Метод найменших квадратів .....</b>	161
4.1. Основне рівняння методу найменших квадратів .....	161
4.2. Приклади обробки різних типів функціональної залежності за методом найменших квадратів .....	165
4.2.1. Залежність $y = a \cdot x$ .....	165
4.2.2. Залежність $y = a \cdot x + b$ .....	167
4.2.3. Залежність $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ .....	170
4.3. Лінеаризація .....	171
4.4. Розклад у ряд за параметрами .....	175
4.5. Оцінка надійності параметрів .....	181
<i>Питання для самостійного повторення .....</i>	188
<i>Задачі для самостійного розв'язку .....</i>	189
<i>Відповіді до задач розділу 4 .....</i>	193

## РОЗДІЛ 5

<b>Основи теорії кореляції</b> .....	194
5.1. Кореляційний момент .....	194
5.2. Рівняння регресії .....	196
5.3. Коефіцієнт кореляції .....	199
5.4. Нелінійна кореляція .....	204
5.5. Кореляційний момент і коефіцієнт кореляції для двовимірної випадкової величини .....	206
<i>Питання для самостійного повторення</i> .....	210
<i>Задачі для самостійного розв'язку</i> .....	210
<i>Відповіді до задач розділу 5</i> .....	211
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	212



Навчальне видання

**Ищенко** Олена Вікторівна  
**Гайдай** Сніжана Вікторівна  
**Дяченко** Алла Григорівна  
**Яцимирський** Андрій Віталійович

## **ОСНОВИ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ХІМІКІВ**

**Підручник**

Редактор О. Грицаюк

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"



Формат 60x84<sup>1/16</sup>. Ум. друк. арк. 12,6. Наклад 100. Зам. № 223-10682.  
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. Х5.  
Підписано до друку 21.08.23

Видавець і виготовлювач  
ВПЦ "Київський університет"

Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна  
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28  
e-mail: vpc@knu.ua; vpc\_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua  
http: vpc.knu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02